Desde 2003, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría -Æ·G-* del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN, Colombia) ha encaminado sus acciones de indagación, innovación y desarrollo curricular hacia el mejoramiento del aprendizaje y la enseñanza de la demostración en geometría, principalmente en el nivel universitario y más exactamente en el ámbito de la formación inicial del profesor de matemáticas. Varias son las publicaciones que se han hecho de los trabajos del grupo en revistas y congresos de la comunidad de Educación Matemática.

La innovación realizada en el curso Geometría Plana de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN tiene como uno de sus productos una aproximación metodológica a la enseñanza cuyo propósito es generar un entorno favorable para aprender a demostrar. De manera sucinta, describimos tal aproximación así: las tareas geométricas que se proponen a los estudiantes para que las resuelvan en el aula, trabajando en grupos pequeños o individualmente, y con frecuencia apoyados en un programa de geometría dinámica, propician la realización de construcciones geométricas y la formulación de conjeturas. Las construcciones y las conjeturas producidas por los estudiantes son los insumos que utiliza el profesor, en intercambios comunicativos colectivos, para promover y guiar la participación de los estudiantes en la organización y el desarrollo del contenido geométrico que se trata en el curso. Con tal aproximación, a lo largo del curso se va conformando un sistema teórico constituido por postulados, definiciones y teoremas.

ISBN 978-958-8908-15-1

9 789588 908151 >

Patricia Perry / Editora

Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría

Patricia Perry / Editora

Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría

República de Colombia

COLCIENCIAS
Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría

Relevancia de lo inadvertido en el aula de Geometría

Patricia Perry
Editora

República de Colombia
COLCIENCIAS
Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Catalogación en la fuente - Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional.

Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría / Patricia Perry.
[et al.] – Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional; Colciencias,
2014.
98 p.

Incluye: Referencias bibliográficas.

ISBN: 978-958-8908-15-1

1. Geometría – Fundamentos. 2. Geometría – Enseñanza. 3. Geometría – Metodología. 4. Geometría – Aprendizaje. 5. Geometría – Métodos de Enseñanza. 6. Educación – Matemáticas 7. Formación Profesional de Maestros. I. Perry, Patricia. II. Molina, Óscar. III. Sua, Camilo. IV. Camargo, Leonor. V. Samper, Carmen. VI. Tít.

516.1. Cd. 21 ed.

ISBN: 978-958-8908-15-1

Preparación Editorial
Sistema de Publicaciones y Difusión del Conocimiento
Calle 72 A Nº 86 - 11
Tel: 594 1894, Ext. 190, 362, 368
editorial.pedagogica.edu.co

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador
Sistema de Publicaciones y Difusión del Conocimiento

Patricia Inés Perry Carrasco
Corrección de estilo

Mauricio Salamanca González
Diseño y Diagramación

Contenido

Prefacio

Desde 2003, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría -Æ·G-* del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN, Colombia) ha encaminado sus acciones de indagación, innovación y desarrollo curricular hacia el mejoramiento del aprendizaje y la enseñanza de la demostración en geometría, principalmente en el nivel universitario y más exactamente en el ámbito de la formación inicial del profesor de matemáticas. Varias son las publicaciones que se han hecho de los trabajos del grupo en revistas y congresos de la comunidad de Educación Matemática.

La innovación realizada en el curso Geometría Plana de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN tiene como uno de sus productos una aproximación metodológica a la enseñanza cuyo propósito es generar un entorno favorable para aprender a demostrar. De manera sucinta, describimos tal aproximación así: las tareas geométricas que se proponen a los estudiantes para que las resuelvan en el aula, trabajando en grupos pequeños o individualmente, y con frecuencia apoyados en un programa de geometría dinámica, propician la realización de construcciones geométricas y la formulación de conjeturas. Las construcciones y las conjeturas producidas por los estudiantes son los insumos que utiliza el profesor, en intercambios comunicativos colectivos, para promover y guiar la participación de los estudiantes en la organización y el desarrollo del contenido geométrico que se trata en el curso. Con tal aproximación, a lo largo del curso se va conformando un sistema teórico constituido por postulados, definiciones y teoremas.

Movidos por las reacciones de sorpresa, incredulidad y curiosidad que detectábamos en nuestros interlocutores cuando les presentábamos nuestra propuesta de aproximación metodológica, vimos una oportunidad para ahondar en el conocimiento y la reflexión sobre esta. Es así como durante los últimos cinco años, el grupo se ha concentrado en documentar y analizar, desde una perspectiva semiótica, diversos aspectos de la implementación de la aproximación metodológica en varias versiones del curso Geometría Plana. En los años 2010 y 2011, indagamos sobre los sucesos de la clase para identificar y describir, por una parte, la acción instrumentada que da lugar a la producción de signos personales y, por la otra, la mediación semiótica del profesor para hacer evolucionar dichos signos hacia signos institucionales. En los años 2013 y 2014, analizamos la actividad semiótica de la comunidad del aula, mediada por el profesor, a través de la cual se organizó y desarrolló el contenido geométrico asociado al Teorema Localización de Puntos, partiendo de las conjeturas que los estudiantes formularon, asociadas a la resolución de un problema designado como Problema de los Cuatro Puntos. Para hacer tal análisis nos concentramos en once sesiones de clase. La primera de ellas corresponde al planteamiento del Problema y la introducción de los elementos teóricos (definición de bisecar y Teorema Existencia del Punto Medio) requeridos para precisar el significado del enunciado del Problema. La última sesión corresponde al empleo del Teorema Localización de Puntos en la validación teórica de la construcción realizada para resolver un nuevo problema relacionado con triángulos congruentes. En las clases intermedias se revisan las conjeturas formuladas por los estudiantes después de resolver el Problema de los Cuatro Puntos, se reformula una de ellas y se hace su demostración, se examina cómo varía la demostración de la conjetura al cambiar la pertenencia de un punto a un recta por la pertenencia a un rayo, se reformula la definición de rayo para hacerla operativa, se formula el enunciado del Teorema Localización de Puntos y se hace su demostración.

Aunque los artículos que componen este libro provienen principalmente de nuestro más reciente trabajo investigativo, no son documentos de investigación sino de divulgación. En ellos nos acercamos, mucho más de lo que es habitual para un profesor, a asuntos clave para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, entendido este como participación en prácticas propias de la comunidad del discurso matemático. El libro está dirigido principalmente a profesores de matemáticas en ejercicio de su profesión y a estudiantes de postgrado en el campo de la Educación Matemática.

En el artículo "Entender el enunciado de un teorema: ¿componente único de su significado?", su autor presenta tres elementos fundamentales que, para el grupo *Æ•G*, hacen parte del significado de un teorema: la estructura y el contenido geométrico de su enunciado; las relaciones del teorema con otros teoremas del sistema al que pertenece en términos de la comparación de las respectivas hipótesis, tesis y demostraciones; y el uso experto del teorema en el marco del sistema teórico al que pertenece, lo cual se refiere a saber cuándo y cómo usar el teorema. Estos tres elementos, afirma Molina, pueden ser de utilidad tanto para la evaluación del aprendizaje de los estudiantes como para el diseño curricular de propuestas didácticas interesadas en construir significado de un teorema. Al final del artículo, a manera de invitación al lector, Molina presenta, de manera ilustrada, una propuesta retadora: construir significado de un teorema sin contar previamente con el enunciado del mismo.

En el artículo "Gestión del profesor enfocada en aspectos de la construcción de significado de una definición y de una proposición condicional", sus autores ponen de manifiesto la necesidad de que el profesor gestione la construcción de significado en el aula y lo haga a partir de las interpretaciones que pueda inferir de los aportes verbales de los estudiantes durante el proceso. En este artículo, Sua y Camargo muestran que la construcción de significado de una definición que un profesor podría despachar muy rápidamente (señalando un error, repitiendo la definición y pidiendo a los estudiantes que se fijen bien en ella para reformular la representación de la situación en la que el objeto definido se pone en juego), está lejos de ser un asunto baladí. En el segundo ejemplo que presentan es posible ver cómo la gestión del profesor en pro de la construcción de significado de un objeto geométrico (en este caso, el enunciado del Teorema Localización de Puntos), no se agota en el momento en que se enuncia y demuestra el Teorema sino que se requiere también en momentos en que se usa en el marco de la resolución de un nuevo problema.

En el artículo "Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa", partiendo de las premisas de que un tratamiento didáctico especial para las definiciones puede contribuir a la construcción de conocimiento y que el uso de una definición hace parte del significado del objeto definido, las autoras presentan e ilustran tres aproximaciones a la enseñanza de las definiciones, que bien pueden ser adoptadas y adaptadas en la clase de geometría de los niveles elemental y medio. Por otra parte, Camargo y Samper, abordan el uso de las definiciones en la producción de demostraciones, para lo cual consideran dos situaciones: i) De un objeto específico (o_i) se sabe que tiene algunas (no todas) propiedades que caracterizan a un cierto objeto genérico (O), y se quiere demostrar que en realidad o_i es un caso de O; es decir, se requiere ir de las propiedades al objeto. ii) De un objeto específico (o_i) se sabe que es un caso de un objeto genérico (O) y de tal premisa se requiere deducir nuevos pasos útiles para la demostración, es decir, se requiere hacer operativa la definición, yendo del objeto a las propiedades que su definición expresa, ajustándolas al contexto en el que se está trabajando para que sean provechosas para la demostración. La complejidad relativa a la enseñanza de las definiciones que se muestra en este artículo permite ver la necesidad de que el profesor se prepare adecuadamente para su quehacer profesional. Enseñar definiciones es mucho más que dictarlas y dar ejemplos del objeto definido.

En el artículo "¿Es esto "machetear"?", sus autoras documentan una estrategia espontánea de los estudiantes para demostrar la existencia de un objeto geométrico que cumple dos propiedades (R y S). La estrategia no es aceptable ya que al usarla no es posible obtener de manera matemáticamente válida lo que se propone lograr; consiste en considerar un objeto específico que cumple la propiedad R para luego tratar de demostrar que tal objeto cumple la propiedad S, siendo que la propiedad S no se puede deducir de la propiedad R pero lo contrario sí es posible. La problemática que se entrevé detrás de esta estrategia incluye el hecho de que los estudiantes pueden creer que considerar un objeto con la propiedad S desde el comienzo de la demostración es incurrir en una práctica no correcta desde la matemática porque es más exigente. Samper y Perry señalan la necesidad de una mediación del profesor planificada, con miras a no pretender que los estudiantes, *motu proprio*, reinventen adecuadamente el procedimiento para demostrar existencia sin que ello signifique excluirlos de su participación en el proceso de construcción de significado del procedimiento aceptable.

Para terminar, en nombre del grupo *Æ•G*, hago llegar nuestro agradecimiento al Centro de Investigaciones y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y a Colciencias por el apoyo económico y administrativo que recibimos para realizar tanto la investigación como la publicación del presente libro.

Patricia Perry

Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema?

Óscar Molina

Andrés: Por fin entendí el Teorema Localización de Puntos.

María: Uy, ¿cómo así?

Andrés: Sí. Leí y leí el enunciado y ya lo entendí.

María: Mmm. Entonces ven me ayudas a hacer este ejercicio. ¿Recuerdas que el profesor dijo que tocaba usar ese Teorema?

[Varios minutos después]

María: ¿No dizque entendías el Teorema? ¿Cómo resolvemos el problema…?

¿Reconoce en sus experiencias escolares, como profesor o estudiante, un diálogo similar al anterior? Si su respuesta es afirmativa, cabe preguntarse: si entendemos el enunciado de un teorema, ¿por qué no podemos emplear el teorema en la resolución de un ejercicio, o en la demostración de otro teorema, por ejemplo?, ¿será suficiente entender el enunciado de un teorema para comprender el teorema o tener un significado más o menos amplio de él? De otro modo, cuando en su rol, un profesor universitario le dice a sus estudiantes: "¿Entienden el teorema?", ¿tendrá claridad sobre lo que pretende que los estudiantes conozcan del teorema mismo y tendrán claridad los estudiantes sobre lo que deben saber del teorema para que su profesor quede satisfecho?

La comunidad de educadores en matemáticas ha puesto de presente algunos aspectos que se deben considerar, en momentos oportunos de la trayectoria escolar, a la hora de introducir a los estudiantes en la práctica de demostrar enunciados matemáticos. Concretamente, sugieren que tal práctica se favorece si los estudiantes entienden: i) aspectos de la lógica (lenguaje y esquemas de razonamiento); ii) el enunciado del teorema que se va a demostrar, en lo concerniente a la identificación de su hipótesis y su tesis; y iii) otros elementos del sistema teórico (postulados, definiciones y otros teoremas) para hacerlos operables en la demostración, etc., (Selden, 2012). No obstante, no es usual que en la literatura especializada se presente una descripción más o menos completa de lo que significa "entender el enunciado de un teorema" o "entender un teorema". Este artículo se concentra en hacer una tal descripción a través de los elementos que, desde nuestro punto de vista, integran el significado de la expresión *tener un significado amplio de un teorema*[1]: (i) estructura y contenido del enunciado, (ii) demostración, (iii) relación con otros elementos teóricos (comparación de enunciados de postulados u otros teoremas y sus respectivas demostraciones) y (iv) uso experto del teorema en diversos contextos. Ejemplificamos la descripción con el Teorema Localización de Puntos (TLP).

El reconocimiento y caracterización de estos elementos es consecuencia de los resultados obtenidos en el proyecto de investigación *Conjeturas y organización del contenido matemático en clase*, específicamente en lo que tiene que ver con el análisis realizado para identificar los significados que los estudiantes tienen del TLP cuando uno de ellos lo emplea como garantía en el marco de la justificación de un procedimiento donde su uso **no** es pertinente. Este análisis nos permitió precisar aspectos del Teorema que los estudiantes o el profesor intentan poner en juego en interacciones cuyo objetivo es precisar por qué el uso de tal Teorema no es adecuado en la situación.

1 Por *teorema* entendemos el sistema ternario conformado por: *enunciado*, su *demostración* y el *sistema teórico* que la soporta (Mariotti, 1997).

Elementos que integran un significado amplio de *teorema*

En las siguientes secciones, describimos e ilustramos los elementos que integran un significado amplio de teorema. En primera instancia, precisamos los rasgos característicos de los elementos y luego las ejemplificamos a la luz del Teorema Localización de Puntos como protagonista; no obstante, en ocasiones usamos otros teoremas para ejemplificar de mejor manera la descripción hecha.

Estructura del enunciado de un teorema y su contenido geométrico

Un primer elemento del significado de un teorema está conformado por la estructura lógica de su enunciado y el contenido geométrico expuesto en el mismo. La estructura lógica del enunciado refiere a la hipótesis y la tesis de la proposición condicional que lo conforma. El contenido geométrico del teorema refiere tanto a los objetos geométricos involucrados en el enunciado y las propiedades de interés, como la relación de dependencia que liga a dichos objetos y propiedades.

Para el caso del TLP, cuyo enunciado es:

> <u>Dados un rayo *CT* y un número positivo *z*</u>, existe un único punto *X* tal que *X* pertenece al rayo *CT* y la distancia de *C* a *X* es *z*,

el texto subrayado corresponde a la hipótesis y el no subrayado, a la tesis. La hipótesis menciona un *rayo* cualquiera (sin propiedad especial alguna) y un *número positivo* cualquiera. La tesis afirma la existencia de un *punto X* en el rayo, cuya *distancia* al extremo del rayo dado es precisamente el número dado. Parafraseando el enunciado, la dependencia entre hipótesis y tesis se describe de la siguiente manera: siempre que se tenga un número positivo y un rayo, es posible encontrar un punto en el rayo tal que la distancia al extremo del rayo sea el número dado. Los objetos involucrados en el teorema, destacados en letra cursiva, son: un rayo, un número positivo, un punto y una distancia entre puntos; y el teorema garantiza la existencia de un punto con dos rasgos (el objeto al que pertenece y su distancia a un punto específico). Esto último hace que el TLP se constituya en un teorema de existencia, si bien no de un objeto geométrico con un nombre especial (es decir un objeto que previamente se haya definido, como es el caso del punto medio de un segmento), sí de un objeto con propiedades específicas (un punto en un rayo que dista de su extremo un número dado). Con la descripción hecha, es posible concluir que el TLP es útil en contextos de distancia entre puntos (necesaria para determinar la medida de longitud de segmentos); de manera general, se usa en casos en los que sea necesario construir un segmento congruente a uno dado mediante la localización de un punto que será uno de sus extremos.

Como se verá en las próximas secciones, identificar la estructura del enunciado de un teorema y precisar su contenido geométrico son acciones necesarias para promover los demás elementos que integran el significado del teorema, en particular, para comparar el teorema con otros.

Demostración del teorema

Como se dijo antes, uno de los elementos constitutivos de un teorema es su demostración. Al involucrarse en el proceso de construir la demostración de un teorema, es importante determinar su estructura; esto es, distinguir los pasos clave de la demostración y, con ello, estudiar las consecuencias que puede tener, durante su desarrollo, una decisión respecto a asuntos teóricos. En tal sentido, vale la pena mencionar que el proceso no discurre meramente generando paso a paso los argumentos que se encadenan y que juntos componen la demostración; es imprescindible, para no quedarse dando palos de ciego, ir analizando el efecto que podrían tener, a mediano plazo, algunas decisiones que se toman en aquellos pasos en los que se tienen opciones para luego escoger el camino correcto.

En la tabla de la subsección titulada "Comparación y analogía entre demostraciones", se muestra la estructura de la demostración del TLP. Específicamente, se exponen aquellos aspectos clave de la demostración (que redundan en los pasos -argumentos- clave de la misma) y el propósito de cada uno de los aspectos destacados. Es, precisamente, en la descripción de estos propósitos donde se establece el resultado del análisis del efecto que tendría la toma de algunas decisiones: por ejemplo, en el aspecto asociado a "Asignar coordenadas al origen del rayo (C) y al punto que lo determina (T)", si convenientemente asignamos como coordenadas de C y T, a 0 y a $t > 0$, respectivamente, cuando llegue el momento de usarlas, la demostración se facilita en los siguientes términos: i) la coordenada del punto X sería el mismo número z y, con ello, la distancia entre X y C sería z (una de las propiedades que se debe demostrar); y ii) los casos de desigualdades entre las coordenadas de los puntos C, T y Z son solo dos ($c < t \leq z$ o $c < z \leq t$) y no cuatro como se muestra en la tabla.

Identificar los aspectos resaltados no es asunto fácil. La experticia para hacerlo depende de haber realizado demostraciones que tengan una estructura análoga y de conocer muy bien el sistema teórico con el que se cuenta, para poder emplear con pertinencia sus elementos (en otras palabras, usar de manera experta otros teoremas, definiciones o postulados del sistema). En la siguiente sección, damos luces al respecto de estos asuntos.

Relación de teoremas: comparación entre sus respectivos enunciados o demostraciones

Otro elemento del significado de un teorema es su relación con otros elementos de una teoría. Es usual que esta relación se plantee en términos de una consecuencia lógica dentro del sistema teórico (e. g., un teorema implica a otro) o en términos de relaciones del enunciado con otro según su estructura (e. g., el enunciado de un teorema es el recíproco de otro). En este artículo, no queremos hacer una descripción de una relación de este tipo; más bien, pretendemos centrarnos en una relación de teoremas del mismo sistema caracterizada por la comparación entre sus respectivos enunciados o demostraciones. Presentamos lo que caracteriza a cada una de tales comparaciones y la utilidad de hacerlas en términos de enriquecer el significado de un teorema.

Comparación de enunciados

Comparar los enunciados de dos proposiciones del sistema teórico requiere hacer uso del contenido geométrico de cada cual, aspecto imprescindible para develar y caracterizar las situaciones en las cuales el teorema se puede usar de manera pertinente. Para ejemplificar esto, presentamos la comparación de los enunciados del TLP y el Postulado Rayos - Número (PRYN). Tal comparación se suele hacer en el curso Geometría Plana del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuando se introduce el PRYN en el sistema teórico de la clase; en ese momento se considera prudente hacer dicha comparación, con el propósito de que los estudiantes hagan una analogía entre uno y otro, identifiquen los objetos geométricos involucrados en cada cual y precisen situaciones generales en las cuales se pueden usar.

A continuación exponemos el enunciado del PRYN. El texto subrayado indica la hipótesis del Postulado; el texto no subrayado, la tesis del mismo:

> <u>Dados una recta *AB* y un punto *C* que no pertenece a la recta, y el conjunto de los números reales entre 0 y 180</u>. Se puede establecer una correspondencia de <u>todos los rayos de extremo *A* y un punto en el semiplano determinado por la recta *AB* en el que está *C*</u> con el mencionado conjunto de números tal que:
>
> i) A cada rayo le corresponde un único número.
> ii) A cada número le corresponde un único rayo.
> iii) Al rayo *AB* le corresponde 0.
> iv) Al rayo opuesto al rayo *AB* le corresponde 180.

Iniciemos la comparación analizando las respectivas hipótesis. Aunque ambas aluden al mismo objeto geométrico (rayo) y a números reales, tienen condiciones diferentes. En el TLP, el objeto geométrico es un único rayo cualquiera, mientras que en el PRYN se alude a todos los rayos contenidos en un mismo semiplano determinado por una recta, y de extremo en dicha recta (i. e., tienen una condición). En cuanto a las condiciones del número, algo similar ocurre: en el TLP se menciona un solo número real con la única condición de ser positivo, mientras que el PRYN alude a todos los números reales positivos menores que 180. En resumen, el PRYN es más exigente que el TLP en lo que tiene que ver con las condiciones de los objetos involucrados en la hipótesis. Cabe anotar que en el enunciado del PRYN, detrás de la caracterización de la correspondencia entre rayos y números se esconde la generación de ángulos y la determinación de su medida.

Ahora, con respecto a las condiciones necesarias que plantean las respectivas tesis, precisamos lo siguiente: el enunciado del TLP afirma la posibilidad de determinar un único punto (e. g., *X*) en un objeto muy bien determinado (un rayo –e. g., rayo *CT*) con una condición de distancia (e. g., *z*) dada a un punto previamente establecido (el extremo del rayo). Por su lado, el PRYN afirma también la posibilidad de determinar un objeto; sin embargo, la determinación mencionada es más compleja que en el caso del TLP, por cuanto precisa las relaciones que pueden presentarse entre los números y los rayos a los que hace referencia la hipótesis. Así, plantea que a cada rayo (con las condiciones específicas) se le puede asignar un único número entre 0 y 180, que a cada uno de tales números se le puede asignar un único rayo de los mencionados, y que a los rayos que conforman la recta se les asigna 0 y 180, según el caso. En síntesis, precisando un rayo (e. g., rayo *AD*) con puntos en el semiplano mencionado en el antecedente (e. g. el determinado por recta *AB*), se puede garantizar la existencia de un único número entre 0 y 180 que le corresponde (e. g., *s*). En el otro caso, especificando un número entre 0 y 180 (e. g., *s*), se puede garantizar la existencia de un único rayo (e. g., rayo *AD*) con puntos en el semiplano mencionado en el antecedente (el determinado por recta *AB*) al cual le corresponde ese número especificado (*s*)[2]. En cualquiera de los dos casos, ese número *s* termina siendo la medida del ángulo *DAB* (al usar la definición de medida de un ángulo[3]).

La anterior descripción de las tesis permite concluir que el TLP, como se dijo antes, es útil en casos en los que se requiera construir un segmento congruente a uno dado mediante la localización de un punto que será uno de sus extremos. Por su parte, el PRYN es útil en contextos donde interviene la medida de amplitud de ángulos; de manera general, en situaciones en las que se requiere construir un ángulo congruente a uno dado mediante la determinación

2 Nótese que el PRYN no declara la existencia de los números reales entre 0 y 180, o de los rayos en un semiplano específico. Estos objetos ya existen *a priori*. Lo que se quiere decir es que existe un número en el conjunto (0, 180) que le corresponde a un rayo con las condiciones dichas en el enunciado del Postulado, y que existe un rayo con tales condiciones que le corresponde a un número dado del conjunto (0, 180).

3 La **medida de un ángulo** se define como el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de los rayos que lo conforman (las coordenadas son los números que les corresponden según el PRYN).

de un rayo que será uno de sus lados. En esencia, más allá de las diferencias específicas entre ambos, los hechos geométricos tienen similitudes: ambos proveen la existencia de sendos objetos (un punto y un rayo, respectivamente) que finalmente proporcionan objetos necesarios para determinar una relación de congruencia, entre segmentos para el caso del TLP y entre ángulos para el caso del PRYN.

Hecha la anterior comparación, es usual que en clase se formule el Teorema Construcción de Ángulos (TCA)[4], cuya demostración se fundamenta principalmente en el PRYN. El enunciado de tal Teorema es el siguiente:

> Sean un rayo *AB* en un plano α y un número real *r* tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único rayo *AD* tal que *D* está en alguno de los semiplanos determinados por la recta *AB* en α y la medida del ángulo *DAB* es *r*.

Como el lector puede darse cuenta, el enunciado del TCA es mucho más parecido al del TLP que el mismo PRYN. Igual que como sucede con tal Postulado, los objetos geométricos involucrados en las tesis de los Teoremas son diferentes, aspecto que determina los contextos en los cuales se pueden utilizar. El análisis comparativo de estos enunciados es similar al presentado antes en relación con el PRYN, razón por la cual no se expone aquí. No obstante, hacemos referencia al TCA pues será importante para lo que sigue.

Comparación y analogía entre demostraciones

Se enseñó ya que comparar los enunciados permite decantar similitudes o diferencias entre los mismos. Cuando dos enunciados de teoremas se parecen (aun cuando involucran objetos diferentes y se usan en contextos distintos) es sensato pensar que su demostración también es similar: en este punto, adquiere otro sentido hacer una comparación entre enunciados. Cuando aludimos a demostraciones parecidas o análogas, nos referimos a que las mismas

4 Sean el rayo *AB* en un plano α y un número real *r* tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único rayo *AD* tal que *D* está en alguno de los semiplanos determinados por la recta *AB* en α y la medida del ángulo *DAB* es *r*.

tienen una misma estructura más allá de las diferencias inherentes a los objetos geométricos involucrados. Para ejemplificar lo dicho presentamos una comparación, a manera de paralelo, entre las demostraciones de tres teoremas de existencia (Teorema Existencia Punto Medio (TPM)[5], TCA y TLP) protagonistas en el curso en cuestión.

En los enunciados de los tres Teoremas, la respectiva tesis alude a la existencia de un objeto geométrico; en dos de ellos (TPM y TLP), a la existencia de un punto que cumple dos propiedades, interestancia[6] con unos puntos dados y distancia a uno o más puntos dados; en el otro enunciado (TCA), a un rayo con una posición especial que conforma un ángulo con otro dado, tal ángulo con una medida específica. La siguiente tabla resalta diferencias y similitudes en los detalles de las respectivas demostraciones, según aspectos fundamentales de estas.

Aspecto / **Teorema**		**TPM**	**TLP**	**TCA**
Conjunto al que debe pertenecer el punto que se busca:		Segmento *AB*.	Rayo *CT*.	Uno de los semiplanos (H) determinados por la recta *AB* en α.
Qué se usa y su propósito	PRN i)[7]	Asignar coordenadas *a* y *b* a los extremos *A* y *B* del segmento, respectivamente.	Asignar coordenadas al origen del rayo (*C*) y al punto que lo determina (*T*).	
	PRYN iii)			Asignar coordenada 0 al rayo *AB*.

5 **Teorema del Punto Medio:** Dado el segmento *AB*, entonces existe un único punto medio, *M*, del segmento *AB*.

6 **Definición de Interestancia:** El punto *B* está entre los puntos *A* y *C*, si: i) *A*, *B* y *C* son colineales, y ii) la suma de las distancias de *A* a *B* y de *B* a *C* es igual a la distancia de *A* a *C*.

7 **Postulado Puntos de Recta - Números Reales (PRN):** Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tales que: i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real, ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número que le corresponde al punto *A* se denomina coordenada de *A*, y se denota con c(*A*).

<table>
<tr><th colspan="2">Teorema / Aspecto</th><th>TPM</th><th>TLP</th><th>TCA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Propósito de la determinación de un número real relacionado con las coordenadas escogidas:</td><td>Satisfacer la equidistancia del punto que se busca a los extremos del segmento.</td><td>Satisfacer que la distancia del origen del rayo al punto buscado sea z.</td><td>Satisfacer que la medida del ángulo conformado con el rayo buscado y el dado sea r.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Condiciones, en términos de las coordenadas asignadas, del número que permite determinar el objeto buscado:</td><td>Es el promedio de las coordenadas asignadas a los extremos.</td><td>Es un número x que depende de la relación de orden entre c(C) y c(T) y del hecho de que la distancia[8] del punto buscado al extremo del rayo sea z. Específicamente, el número x es la suma o la diferencia de c(C) y z, según si c(T) es mayor o menor que c(C).</td><td>Es un número entre 0 y 180 tal que el valor absoluto de la diferencia entre la coordenadas que se asignen a los rayos que conforman al ángulo sea r. Específicamente, como la coordenada del rayo AB es 0, el número buscado es el mismo r.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Qué se usa y cómo:</td><td>PRN ii) tal que:</td><td>M sea el punto que se le asigna al número obtenido anteriormente.</td><td>X sea el punto que se asigna al número obtenido anteriormente.</td><td></td></tr>
<tr><td>PRYN ii) tal que:</td><td></td><td></td><td>Rayo AD sea el rayo en H que se asigna al número obtenido anteriormente.</td></tr>
</table>

8 La **distancia entre dos puntos** se define como el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de los puntos (las coordenadas son los números que les corresponden según el Postulado Puntos de Recta - Números Reales).

Aspecto \ Teorema		TPM	TLP	TCA
Qué se usa, cómo y propósito:	Teorema Orden - Interestancia[9]	Si el promedio de a y b es mayor que a y menor que b, o, mayor que b y menor que a, entonces M está entre A y B.	Si [$c < t \leq c + z$ o $c < c + z \leq t$] o [$t \leq c - z < c$ o $c - z \leq t < c$] entonces (T está entre C y X) o (X está entre C y T) o (T es igual a X).	
		Inferir interestancias que posibiliten deducir que el punto pertenece al conjunto requerido usando el orden de las coordenadas.		
	Definición del objeto geométrico (rayo[10]) al cual debe pertenecer el punto buscado:	M pertenece al segmento AB.	X pertenece al rayo CT.	
Determinar distancia o medida según el caso	Determinar la distancia deseada que debe tener el punto buscado con los puntos dados.	En cualquier caso, distancia de A a M es igual a distancia de B a M.	En cualquier caso, distancia de C a T es z.	
	Determinar la medida deseada del ángulo que se conforma.			Medida de ángulo DAB es r.
Finalizar la demostración según la definición del objeto buscado si aplica; si no, hacer solo la respectiva conjunción:		Se usa la definición de punto medio para inferir que M es punto medio del segmento AB.	Se hace la conjunción de los dos últimos pasos: X pertenece al rayo CT y la distancia de C a T es z.	Se hace la conjunción de los dos últimos pasos: rayo AD contenido en H y medida del ángulo DAB es r.

La tabla anterior ilustra la gran similitud que tienen las demostraciones desde un punto de vista estructural, hecho que se evidencia en la primera columna. Esta presenta los aspectos clave de las demostraciones en términos

9 **Teorema Orden - Interestancia:** Dados tres puntos A, B y C de la recta m, si $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$, entonces B está entre A y C.

10 **Definición de Rayo:** Dados A y B dos puntos de una recta, el rayo AB es la unión del segmento AB con el conjunto de puntos X de la recta para los cuales B está entre A y X.

de aquellas propiedades que están en la tesis del enunciado, que como se observa, es trasversal a cada enunciado más allá de los hechos geométricos que se usan para cada caso (según los objetos involucrados). Las demás columnas muestran el desarrollo particular de cada demostración y con ello, la relación del teorema en cuestión con otros elementos del sistema teórico útiles para producirla.

Con los ejemplos presentados buscamos ilustrar cómo al notar las diferencias o similitudes de los enunciados de los teoremas es posible, con base en la demostración de uno de ellos, dilucidar las de los demás siguiendo un esquema análogo. Es una manera de intepretar lo que Selden (2012) refiere como *tener un amplio repertorio de ejemplos y usarlos apropiadamente*, en este caso para construir la demostración de un teorema.

Uso experto de teoremas (postulados o definiciones) en diversos contextos

Uno de los propósitos de determinar el contenido geométrico del enunciado de un teorema es develar y caracterizar las situaciones o contextos donde se puede utilizar. Además de precisar la temática general en la que se puede utilizar, reconocemos otros dos contextos mucho más específicos:

- en la justificación teórica de un procedimiento de construcción de un objeto geométrico con alguna propiedad especial, cuando se emplea como garantía de un paso en tal procedimiento; o
- en la demostración de otro teorema, cuando se usa como garantía de una afirmación en un paso de dicha demostración.

Ahora bien, develar y caracterizar los contextos donde es pertinente usar un teorema no es suficiente, también hay que saber usarlo. Pero ¿qué significa saber usar un teorema? Con dos ejemplos[11], intentaremos ilustrarlo.

11 La producción de los estudiantes que se utiliza para configurar los ejemplos se toma de sesiones de clase que tuvieron lugar en el segundo semestre de 2013.

Ejemplo 1. En la justificación teórica de un procedimiento

En el curso Geometría Plana, se propone a los estudiantes el siguiente problema para cuya resolución deben usar un programa de geometría dinámica. Para ese momento, ellos cuentan con el PRN. El problema tiene el propósito de introducir el TLP en el sistema teórico:

> **Problema de los Cuatro Puntos**: Dados tres puntos no colineales A, B y C, ¿existe un punto D tal que los segmentos AB y CD se bisequen?

El procedimiento que usualmente emplean es el siguiente: i) construir tres puntos A, B y C no colineales; ii) construir el segmento AB y el punto medio M de este; iii) construir la recta CM; iv) construir la circunferencia de centro M y radio CM; v) marcar el punto D como la otra intersección de la recta y tal circunferencia. El punto D es el que se busca (Figura 1).

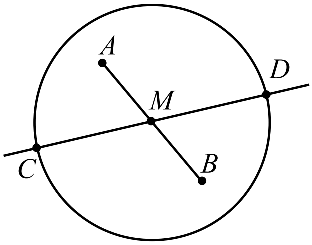


Figura 1

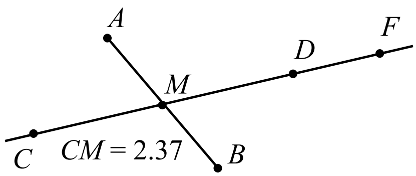


Figura 2

Cuando este procedimiento se expone ante la clase, el profesor pregunta sobre la justificación teórica de cada uno de los pasos de tal procedimiento. No hay dificultad alguna para justificar los tres primeros pasos, sí para justificar el cuarto: el objeto circunferencia no existe en el sistema y no se tiene la intención de introducirlo en ese momento, pues no es necesario desde un punto de vista teórico –como se verá en lo que sigue. Los estudiantes deben encontrar una manera de ajustar el procedimiento, más exactamente deben remplazar los pasos cuarto y quinto de manera que lleguen a determinar el punto D mediante acciones que puedan respaldar teóricamente. En el procedimiento inicial, ellos usan la circunferencia porque les permite "copiar" medidas de longitud; así que, los pasos cuarto y quinto se pueden remplazar por las siguientes acciones que sí se pueden respaldar teóricamente: iv) construir un punto *F* en la recta *CM* tal que *M* esté entre *C* y *F*; v) construir el rayo *MF*; vi) tomar la distancia de *C* a *M*; vii) emplear la herramienta *trasferencia de medidas* usando tal rayo y tal distancia; y viii) denominar el punto que surge en el rayo *MF* como *D* (Figura 2).

En esencia, este procedimiento provoca que el objeto circunferencia no se introduzca al sistema por cuanto no es necesario hacerlo, ya que lo que se quiere producir es consecuencia de un elemento teórico disponible: el PRYN. No obstante, se usa este episodio como pretexto para no aludir directamente a tal postulado (y con ello a las coordenadas), sino más bien crear un hecho geométrico que se ajusta más a la situación (usar un rayo y un número positivo para garantizar la existencia de un punto con una posición y distancia a otro punto especiales); en tal sentido, se propone construir el enunciado del TLP según las condiciones con las cuales se contaba y el resultado que se esperaba. Terminada esa labor, y con el propósito de usar el nuevo Teorema (TLP), enseguida se acoplaron los objetos que se tenían en los primeros tres pasos a las condiciones de la hipótesis del Teorema; esto es, construir un rayo –rayo *MF*– y un número positivo –distancia de *M* a *C*.

Ejemplo 2. En la justificación de otro teorema

Se pretende demostrar el Teorema ALA[12]. En términos generales, la demostración del Teorema descansa en una idea clave: hacer una construcción auxiliar, esto es, construir un triángulo congruente a uno de los dados (i. e., copiar el triángulo), utilizando partes (lados y ángulos) del otro triángulo dado, de tal manera que se acaba demostrando que los triángulos coinciden. Para ilustrar esta idea, pensemos que se dan los triángulos *ABC* y *DEF*; en tal sentido, se debería: i) construir, por ejemplo, el triángulo *AB'C* congruente con el triángulo *DEF* (Figura 3); y ii) determinar que los triángulos *AB'C* y *ABC* son el mismo; esto es para el caso particular expuesto antes, se debería deducir que *B'* y *B* son iguales.

12 **Teorema ALA**: Dada la correspondencia entre los triángulos *ABC* y *DEF* tal que los ángulos de vértices *A* y *D*, *C* y *F* y los segmentos *AC* y *DF* son congruentes, entonces los triángulos *ABC* y *DEF* son congruentes.

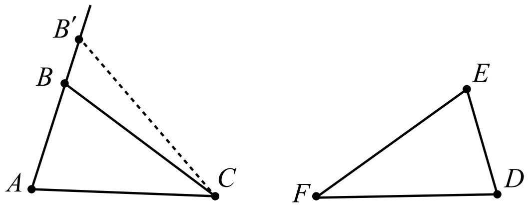


Figura 3

En este ejemplo, no se pretende exponer la demostración completa del Teorema –para ver un esquema general de la misma, consultar el libro *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (Samper y Molina, 2013); sí se pretende mostrar el uso del TLP como garantía en un paso de la demostración. Antes se dijo que uno de los pasos fundamentales en la demostración es construir el triángulo *AB'C* congruente con el triángulo *DEF* de forma tal que quede superpuesto al triángulo *ABC*. Como se debe determinar una congruencia de triángulos, los estudiantes deben aludir al Postulado LAL (único criterio que se tiene para determinar tal congruencia). Específicamente, ellos deben notar que para lograrlo, basta construir un segmento congruente con un lado –convenientemente escogido– del triángulo que se quiere "copiar"; así podrían usar tal Postulado, ya que con la hipótesis del enunciado del Teorema ALA, cuentan además con la congruencia de un par de ángulos y un par de lados correspondientes (ángulos de vértices *A* y *D*, y segmentos *AC* y *DF* congruentes, por ejemplo).

Con este panorama, y dado que hemos tomado las dos congruencias mencionadas, los estudiantes deben precisar que no tienen más opción que escoger el segmento *DE* para construir un segmento congruente con él. El paso siguiente es hacer la construcción del nuevo segmento, con la condición de usar lados o ángulos del otro triángulo (*ABC*). En este punto, los estudiantes deben evocar el TLP como recurso teórico pertinente en este contexto puesto que les permite hacer la construcción deseada. Ahora bien, deben *saber* usarlo, es decir:

- ajustar (o acoplar) los objetos geométricos con que cuentan según las condiciones dadas en la hipótesis del Teorema ALA, a las condiciones de la hipótesis del TLP; esto es, determinar el rayo *AB* con base en el segmento *AB* (hecho que se garantiza con el Teorema

Recta - Rayo - Segmento[13]) y un número positivo conveniente, para este caso, la medida de longitud del segmento *ED* (i. e., la distancia entre los puntos *E* y *D*), y

- determin ar el punto *B*' en el rayo *AB* con las distancias entre *A* y *B'* y *E* y *D* iguales, conclusión que se obtiene al usar como garantía el TLP.

Con los dos ejemplos se pretende ilustrar lo que entendemos por "usar apropiadamente" un teorema (en este caso, el TLP), que en términos de Bills y Tall (1998, citado en Selden, 2012) se conoce como *hacer operable* el teorema. En primera instancia, se evocó en situaciones donde era pertinente usarlo (construcción de un segmento congruente con otro). En segundo lugar, hubo un uso experto del TLP; esto es, fue necesario ajustar (o acoplar) a las propiedades mencionadas en la hipótesis del TLP, tanto un paso en el procedimiento de construcción (ver Ejemplo 1) como los objetos dados en la hipótesis de un Teorema que se quiere demostrar (ver Ejemplo 2), para poder usar el TLP como garantía en la justificación de tal procedimiento o de dicha demostración.

A manera de conclusión

Para terminar, presentamos unas reflexiones que son producto de la descripción realizada. En primera instancia, ponemos a disposición de la comunidad de educación matemática cuatro elementos que integran un significado amplio de un teorema. Consideramos que cada uno de esos elementos puede servirle al profesor de matemáticas en dos sentidos diferentes: i) como indicador para inferir el significado que, en un momento particular del proceso educativo, dan sus estudiantes a un teorema específico, y ii) como recurso didáctico para la planeación y gestión de clase cuyo propósito sea propiciar en el aula la construcción de significado de un teorema específico.

Como se evidencia en la descripción hecha de tales elementos, el primero de ellos se convierte en soporte de los otros tres; no se puede hacer uso experto de un teorema o hacer una comparación entre enunciados o demostraciones de teoremas, si no se ha entendido su enunciado en el sentido

13 **Teorema Recta - Rayo - Segmento:** Existe la recta *AB* si y solo si existe el segmento *AB* o el rayo *AB*. Existe el rayo *AB* si y solo si existe el segmento *AB* o la recta *AB*.

expuesto en párrafos anteriores. Con este panorama, nos atrevemos a sugerir entonces que, en un contexto educativo en el que se pretenda iniciar el camino de construcción del significado de un teorema, es necesario propiciar un espacio para que los estudiantes hagan un estudio juicioso de su enunciado, con el propósito de reconocer su estructura y explicitar su contenido geométrico. Insistimos que *cumplir* con este único indicador, no es suficiente –pero quizá sí necesario- para tener un significado más o menos completo de un teorema, por lo menos a nivel universitario. Los otros dos elementos deben ser parte de este camino, recorridos de manera paulatina pero con la suficiente conciencia de su importancia.

Una invitación

Nótese que hasta el momento hemos presentado elementos que integran un significado, relativamente amplio, de un teorema, una vez conocido su enunciado. Pero, desde un punto de vista didáctico, ¿por qué no pensar en la construcción de un significado tal, previo al conocimiento del enunciado por parte de un sujeto (i. e., un estudiante)? El grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, en el marco de la invitación sugerida en la pregunta anterior, está convencido de que si un estudiante participa en la producción del enunciado de un teorema, es posible que construya a su vez un significado del mismo en lo que respecta, por lo menos, a los elementos primero y cuarto expuestos en secciones anteriores. Este presupuesto se fundamenta en dos referentes: el enfoque sociocultural del aprendizaje, en particular, bajo la perspectiva participacionista (Sfard, 2008); y la teoría de signos propuesta por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012).

Asociado al primer referente, tal como se expone en Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), concebimos *aprender* como un proceso gradual que ocurre principalmente en la comunidad del aula, mediante el cual los estudiantes van siendo capaces de participar en una actividad específica –para este caso, la producción de un teorema– con una disposición genuina o auténtica (i. e., asumen un papel de colaboradores o líderes por iniciativa propia, según lo permita y lo requiera la circunstancia), y un comportamiento autónomo (i. e., activan sus recursos intelectuales para hacer propuestas y sostenerlas, para considerar y tomar posición frente a las propuestas de los otros miembros de la comunidad del aula) y relevante (i. e., intervienen con aportes que son útiles aun si tienen errores). Asociado al segundo referente, entendemos por *construcción de significado* el proceso mediante el cual se producen y refinan las interpretaciones idiosincráticas sobre aspectos de un objeto matemático determinado, generadas en la mente del sujeto (estudiante, para este caso) cuando recibe un signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, imagen mental) que hace explícito lo que pretende comunicar otro sujeto (para este caso, un profesor u otro estudiante) sobre el objeto; el propósito del proceso es que tales interpretaciones, a mediano o largo plazo, sean consonantes con el significado pretendido del profesor (y con ello, consonante con el significado del objeto referente en la comunidad del discurso matemático (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

En lo que sigue, describimos brevemente la *aproximación metodológica para la enseñanza*, mediante la cual intentamos propiciar que nuestros estudiantes participen en la producción de un enunciado matemático, y con ello construyan el respectivo significado cercano al pretendido por el profesor.

Aproximación metodológica para la enseñanza

Destacamos tres elementos sobre los que recae nuestro esfuerzo didáctico innovador para generar un entorno favorable para aprender a demostrar: las tareas matemáticas, el uso de la geometría dinámica y la interacción social en la clase[14].

Desde el momento mismo en que se inicia el desarrollo de un tema, se involucra a los estudiantes en la resolución de problemas abiertos[15] de índole geométrica (Samper, Molina, Camargo, Perry y Plazas, 2013) como medio para lograr que sean ellos quienes descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales, todo con el objetivo de que puedan participar

14 El curso en el que se emplea esta aproximación metodológica no cuenta con libro de texto. La comunidad del aula desarrolla el contenido geométrico a lo largo de las sesiones de clase. El profesor sigue un modelo teórico (el de Birkhoff, 1932) y guía las conversaciones para que el sistema teórico que se produce en clase, se corresponda con aquel.

15 Los problemas abiertos se componen de la descripción de una situación y una pregunta que pide establecer una conjetura, como proposición condicional, que exprese relaciones entre propiedades de los objetos geométricos involucrados. Dicha pregunta de ninguna manera revela o sugiere una respuesta.

activamente en la introducción de nuevos enunciados en el sistema teórico en desarrollo. Creemos que en un ambiente como el esbozado antes, los estudiantes alcanzan un cierto grado de familiaridad con los objetos geométricos sobre los que versarán los enunciados que harán parte del sistema teórico en producción. Cabe mencionar que los estudiantes trabajan en forma individual o en grupos pequeños, apoyados en el uso de un programa de geometría dinámica (Geogebra o Cabri, por ejemplo). Incide en la ganancia de esta familiaridad la posibilidad de modelar una situación en un entorno en el cual están inmersos ciertos conocimientos geométricos; en consecuencia, las relaciones que los estudiantes descubren en la exploración de dicha situación se pueden modelar matemáticamente, esto es, existe teoría matemática que las explica (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti, 1997).

Un ejemplo de problema que se les propone a los estudiantes es el Problema de los Cuatro Puntos, expuesto en una sección anterior.

Después de la resolución del problema se pide a los estudiantes presentar sus producciones –que, por lo general, son diversas– ante la comunidad del aula con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados e ideas que se convierten en material de trabajo de la comunidad para formar el sistema teórico. Específicamente, se les pide presentar: el procedimiento de construcción realizado en el programa de geometría dinámica, la validación de cada paso del procedimiento desde el sistema teórico del que disponen en el curso, y la formulación de una conjetura que sintetice el resultado establecido. En una sección anterior, ya se expuso un procedimiento de construcción sugerido y un bosquejo de la validación teórica dada por los estudiantes. Conjeturas asociadas al problema, que usualmente surgen de los estudiantes, son:

> Dados tres puntos no colineales A, B y C. Entonces existe un punto D tal que los segmentos AB y CD se bisecan.

> Dados tres puntos no colineales A, B y C. Si D pertenece al rayo CM, con M punto medio del segmento AB y las distancias de M a D y a C iguales, entonces los segmentos AB y CD se bisecan.

Respecto a la interacción social en la clase, destacamos dos tipos de conversación: la instruccional y la matemática (Perry, Samper, Camargo, y Molina, 2013). A través de una *conversación instruccional* del profesor con uno o varios estudiantes sobre las producciones presentadas, se favorece la construcción colectiva de significado que tiene lugar cuando los miembros más experimentados de una cultura instruyen a los menos experimentados. En esta conversación se llevan a cabo acciones como responder preguntas que ayudan a ganar familiaridad y comprensión de los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, revisar la formulación misma de las conjeturas, establecer la definición de un objeto que interviene en la situación, etc.

Siguiendo con el ejemplo que nos ha servido para ilustrar la aproximación metodológica, respecto al enunciado del Problema, el profesor genera una conversación instruccional en la que se aclaran definiciones de objetos o relaciones como: bisecar, punto medio y segmentos bisecados. Además, se estudian las conjeturas formuladas para aceptarlas o rechazarlas. Es así como el profesor invita a los estudiantes a precisar cuál de las dos conjeturas anteriores es "mejor". Ellos se inclinan por la segunda aduciendo que es mucho más completa que la primera por cuanto da información sobre las condiciones del punto *D* para que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen.

En este punto, el profesor aclara que si bien se demostrará la segunda conjetura, cuando él pide la justificación de cada paso del procedimiento de construcción, lo que pretende es que se garantice la existencia del punto *D* con las condiciones que se mencionan en la hipótesis de tal conjetura. En la medida que los estudiantes no se percatan de dicho asunto, el comentario del profesor al respecto, hace parte también de la conversación instruccional.

En el marco de una *conversación matemática*, considerada como el diálogo entre el profesor y los estudiantes (o entre los estudiantes) sobre un tema matemático específico, las ideas se comunican, se comentan y se critican. No nos referimos a esta interacción como una discusión matemática porque ella implica que los estudiantes tengan una posición definida con respecto a una idea matemática y que puedan confrontarla con otras; en nuestro caso, esto no ocurre pues para los estudiantes de ese nivel, la exigencia de esta tarea está por encima de su madurez matemática actual. Consideramos que en una conversación matemática, la participación estudiantil se hace más autónoma, auténtica y relevante, lo que permite que el profesor actúe como un miembro más de la comunidad en aspectos relacionados con contenido matemático. En esta conversación, la responsabilidad de culminar con éxito una tarea recae en toda la comunidad. El papel del profesor se enfoca en administrar las propuestas de los estudiantes, controlar el uso correcto de los elementos del sistema teórico, e institucionalizar el conocimiento.

En el marco de la actividad de clase que tuvo lugar a partir del Problema de los Cuatro Puntos, la conversación matemática se generó principalmente en dos momentos: al justificar teóricamente el procedimiento de construcción y al justificar la conjetura misma. La descripción realizada en este escrito cuando se presentó un procedimiento de construcción asociado al Problema (véase el Ejemplo 1 de la sección "Uso experto de teoremas (postulados o definiciones) en diversos contextos") alude al primero de estos momentos. Como se dijo allí, en el marco de la justificación de uno de los pasos de la construcción (el que da origen al punto *D*), el profesor tiene el propósito de introducir el TLP; sin embargo, en tal sección no se hizo referencia a lo complejo del proceso que tuvo lugar para construir el enunciado de dicho Teorema. Este proceso estuvo permeado por una conversación matemática; a continuación presentamos una breve descripción de la misma. En primera instancia, para determinar el punto *D*, los estudiantes usan un objeto geométrico (la circunferencia) que el profesor aún no quiere introducir al sistema. Él asevera que ese objeto no es necesario para hacer dicha construcción; así que, luego intentan usar el PRN y, con ello, usar coordenadas. Se presentan varias dificultades al intentar dilucidar qué coordenadas deben tener los puntos *C* y *M* (después de construida la recta que los contiene), para precisar luego el número *x* que daría la existencia del punto *D* buscado en tal recta. Tras una conversación instruccional para precisar las coordenadas de tales puntos y el número *x*, finalmente se establece que una asignación conveniente es cero y *m* respectivamente para los puntos *C* y *M*, y *x* igual a 2*m*. Con esto establecido, haciendo uso del PRN y del Teorema Orden - Interestancia, se garantizan respectivamente la existencia del punto *D* (que le corresponde al número *x*) y el hecho de que *M* está entre *C* y *D*. Los estudiantes entonces han determinado que existe un punto *D* con las condiciones impuestas en la conjetura, y se percatan de que ello es producto de la justificación del paso de construcción respectivo (se da sentido al último comentario relativo a la conversación instruccional).

Se inicia en ese momento una actividad de clase, quizá la más compleja durante el proceso de producir el enunciado del TLP: con base en la experiencia vivida, sintetizar en una proposición condicional que no haga uso de coordenadas ni de una recta, y sí de un rayo y de un número positivo, un hecho geométrico que posibilite la construcción del punto *D*. El profesor pretende con ello que los estudiantes sustituyan el PRN que exige varios elementos (números, recta, puntos) por una proposición más sencilla que recoja sintéticamente el ítem ii) del Postulado; es decir, que produzcan un enunciado más operable en diferentes situaciones. Con el objetivo de que sean los estudiantes quienes formulen tal enunciado, el profesor pregunta: qué es lo que, en esencia, es requisito para construir el punto *D*. Los estudiantes, interpretan la pregunta asociando la respuesta a las condiciones del PRN; se refieren entonces a coordenadas, recta, etc., pero no a lo que el profesor quiere escuchar: el rayo del cual se debe partir y el número positivo (doble de la distancia de *M* a *C*) que representa una distancia y con el que se determina el punto *D.* Fueron fallidos los intentos del profesor para que autónomamente se produjera tal explicitación por parte de los estudiantes. Fue el profesor quien llamó la atención sobre este hecho e hizo un recuento de lo sucedido en el proceso de construcción del punto *D*. Así, aunque los estudiantes no formularon el enunciado del TLP, sí vivieron la manera en como este se puede producir y experimentaron la necesidad de introducirlo al sistema con su uso en acto: determinar un punto en un rayo que esté a una cierta distancia de otro, lo cual finalmente termina generando dos segmentos congruentes.

Con la descripción y ejemplificación de nuestra aproximación metodológica para la enseñanza –empleada en nuestros cursos de Geometría Plana con el firme propósito de que los estudiantes experimenten actividad demostrativa y participen en la construcción de un sistema teórico como lo propone Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986)–, quisimos mostrar de qué manera es posible que los estudiantes vivan un proceso de producción de hechos geométricos susceptibles de ser enunciados de teoremas. En cualquiera de los dos contextos, bien sea porque el enunciado es respuesta a un problema específico (caso de las conjeturas que proveen la solución a dicho problema) o porque se constituye en una necesidad teórica para poder justificar un paso de construcción relativa a tal solución, es altamente probable que los estudiantes le den un significado al Teorema en términos de su contenido geométrico y de su utilidad en ciertas situaciones.

Referencias

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/uami/ahg/1932_Birkhoff.pdf

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching*. Stellenbosch, Sudáfrica: RUMEUS, University of Stellenbosch. Disponible en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Universidad de Helsinki.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. IV , pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L., Perry, P. y Plazas, T. (2013). Problemas abiertos de conjeturación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 167-170). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Gestión del profesor enfocada en aspectos de la construcción de significado de una definición y de una proposición condicional

Camilo Sua y Leonor Camargo

Introducción

Podría suponerse que tener el enunciado de una definición geométrica o de una proposición condicional es suficiente para poder reconocer los objetos o relaciones involucrados en él, identificar representaciones que ejemplifican el significado del enunciado, establecer la forma en que los objetos involucrados se relacionan, y sacar provecho de los usos que pueden tener los enunciados en la actividad matemática. Sin embargo, esta suposición no es evidente al observar la actividad matemática que desarrollan los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad. Para que ellos puedan sacar provecho de un enunciado, en las vías señaladas, se requiere de una gestión cuidadosa del profesor en el aula de matemáticas, en pro de la construcción de significado de tales enunciados, a partir de las interpretaciones que de estos puedan tener los estudiantes. En este artículo ejemplificamos tal gestión en dos situaciones relacionadas con una definición y una proposición condicional, con el objetivo de hacer un llamado a los profesores acerca del cuidado que deben tener al momento de trabajar con enunciados de ambos tipos. En el caso de la definición, la gestión está orientada a la producción de una representación de la relación bisecarse y a la diferenciación de las expresiones "se bisecan" y "biseca a". En el caso de la proposición condicional, la gestión se enfoca en cómo usar un teorema para justificar la existencia de un punto en un rayo a una distancia dada del origen.

Qué entendemos por "construir significado"

Para referirnos a la construcción de significado nos valemos de elementos de la teoría del signo triádico de Charles S. Peirce, con base en elaboraciones de dicha teoría realizadas por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012). Desde el punto de vista de Peirce, la semiosis es la actividad comunicativa en la que se crean o se usan SIGNOS. En un SIGNO se ponen en relación tres componentes: un objeto, a lo que se alude en la comunicación o el pensamiento; una representación con la que se alude al objeto (e. g., palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos); y un interpretante, lo que produce la representación en la mente de quien lo percibe y lo interpreta, es decir, del intérprete (Figura 1).

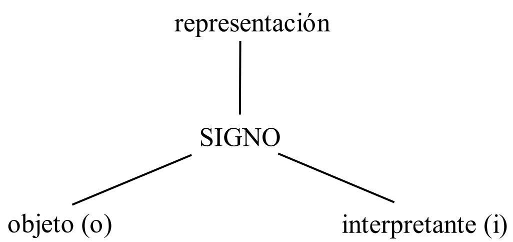


Figura 1: Estructura general del SIGNO

La enseñanza y el aprendizaje se conciben como procesos dialógicos de interpretación que generan secuencias de SIGNOS, que implican distintos sistemas de representación (matemáticos, lingüísticos, gestuales, sociales, etc.). En estos procesos, el profesor y los estudiantes que se involucran en una conversación exhiben diferentes niveles de conocimiento con respecto a un objeto, en nuestro caso, un objeto matemático. La interacción discursiva tiene como meta la construcción de significado por parte de los estudiantes, con el apoyo del profesor. La secuencia de SIGNOS se produce en sucesivos ciclos de interpretación colectiva, a partir de representaciones expuestas de ciertos aspectos de tal objeto, de diferente naturaleza, que bajo la óptica de quien las emite (profesor o estudiante) sirven para comunicar o inferir aspectos del objeto, con base en la interpretación que el receptor (profesor o estudiante) hace de los mismos. La construcción de significado busca lograr la compatibilidad de las ideas de los estudiantes con las de la comunidad del discurso matemático de referencia, representada por el profesor, con base en una meta educativa particular.

La gestión del profesor relacionada con la construcción de significado en el aula, asunto en el que centramos el presente artículo, consiste en impulsar acciones interpretativas deliberadas con el propósito de lograr la convergencia de los interpretantes de los estudiantes hacia la interpretación pretendida. Las acciones que el profesor pone en juego son respuesta principalmente a las inferencias que hace acerca de los interpretantes de los estudiantes en un determinado momento de la construcción de significado. En el intercambio comunicativo, el profesor ajusta los aspectos del objeto matemático que quiere destacar a aquellos aspectos interpretados por él, cuando actúa como receptor, que considera útiles en la evolución que pretende. Para ilustrar la gestión del profesor, presentamos a continuación dos ejemplos.

Ejemplo 1. Construcción de significado de la relación bisecar

Para ejemplificar aspectos de la gestión del profesor en la construcción de significado del enunciado de una definición, tomamos fragmentos de intercambio dialógico en una clase de geometría euclidiana plana, de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, en la que el profesor impulsa una conversación relacionada con la solución al siguiente problema, que los estudiantes han resuelto usando el programa de geometría dinámica Cabri:

> **Problema de los Cuatro Puntos (PCP)**: Dados tres puntos no colineales *A*, *B* y *C*, ¿existe un punto *D* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen?

Construcción de dos segmentos que, según el grupo de Molly, se bisecan

Por sugerencia del profesor, Molly pasa al tablero, conecta su computador a un *video-beam* y presenta en frente a todos los estudiantes el procedimiento que su grupo llevó a cabo, en Cabri, para hacer la construcción que les permitió resolver el interrogante planteado.

Profesor: […] Entonces vamos a mirar la propuesta del grupo de Molly. ¿Qué hicieron primero?

Molly: (En el tablero). Bueno, nosotros primero construimos los tres puntos y… (construye en Cabri tres puntos no colineales y los designa por *A, B* y *C* [Figura 2]). Ya después hicimos el segmento *AB*.

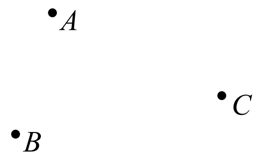


Figura 2

Profesor: ¿Esos tres puntos tienen alguna condición en especial, Molly?

Molly: Solo que no sean colineales.

Profesor: Entonces, a medida que vamos diciendo las cosas que se construyen, vamos a ir diciendo, a su vez, las condiciones [que tienen]. ¿Listo?

Molly: (Mientras el profesor dice lo anterior, Molly construye el segmento *AB* [Figura 3]).

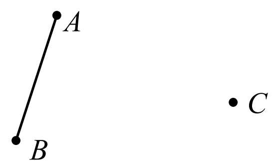


Figura 3

Profesor: (Comienza a escribir en el tablero la enumeración de los pasos de la construcción del grupo de Molly) Entonces… puntos *A, B, C* no colineales. ¿Después qué fue lo que hicieron, Molly?

Molly: Eeee, realizamos el segmento *AB*.

Profesor: Ajá. (Escribe en el tablero el segundo paso). Realizamos el segmento *AB,* listo.

Molly: Después colocamos el punto medio del segmento *AB*.

Profesor: Ujum. (Escribe en el tablero el tercer paso: "Colocamos el punto medio")

Molly: (Construye el punto medio del segmento *AB* y lo designa por *D* [Figura 4])

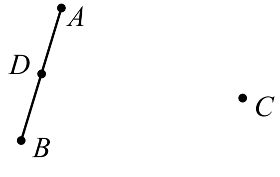


Figura 4

Profesor: (Incluye esta información en el tercer paso que ha escrito) Entonces, colocamos el punto medio *D* del segmento *AB*, listo. Y, ¿luego?

Molly: Eeee, trazamos el segmento *CD* (construye lo mencionado [Figura 5])

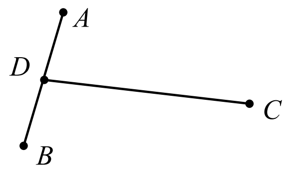


Figura 5

Profesor: (Anota en el tablero el cuarto paso: “Trazamos el segmento *CD*”). Listo. Y, ¿qué pasó?

Molly: Yyyy, pues, según la definición de bisecar, tenemos que el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan.

La interacción comunicativa entre Molly y el profesor se centra en la reproducción de los pasos de la construcción hecha por el grupo de la estudiante, y la especificación que la estudiante o el profesor hacen de los objetos construidos y las condiciones que tienen. La representación geométrica expuesta en la Figura 5 junto con la verbalización: “según la definición de bisecar, tenemos que el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan” nos permiten inferir lo que para el grupo de Molly significa que dos segmentos se bisequen. Según estos estudiantes, dos segmentos se bisecan si uno de ellos contiene el punto medio del otro. La intervención de Molly ofrece al profesor la oportunidad de abrir un espacio en la clase para revisar el significado del término “bisecar”. Este grupo, al parecer, está confundiendo la expresión “los segmentos se bisecan” con “un segmento biseca a otro”. Según los estudiantes, los segmentos *AB* y *CD* se bisecan si el punto de intersección de ellos es el punto medio del segmento *AB* y extremo del segmento *CD*.

¿La representación propuesta por Molly corresponde a segmentos que se bisecan?

El profesor promueve una conversación sobre el informe dado por Molly. Se genera una polémica en la que algunos estudiantes se refieren a cómo interpretaron la representación de dos segmentos que se bisecan.

Profesor: Mmmm ¿qué opinan ustedes de lo que hizo ese grupo [de Molly]?

Elisa: Yo tengo una inquietud. En el ejercicio dice que los dos segmentos se bisecan; no dice que uno biseca al otro.

Profesor: Ajá.

Elisa: Y en este ejemplo, vemos que el segmento... *CD* biseca al segmento *AB*. Mi pregunta es… si esa construcción está bien hecha o mal, porque yo entiendo que los dos segmentos se bisecan.

Profesor: ¿Qué dicen sus compañeros?

Varios: (Entre murmullos, se oye la voz de Camilo) Yo hice lo mismo [que Molly].

Profesor: Entonces, hay algo ¿no? Y es que Elisa dice: tengo la duda de si acá (señala en el tablero el dibujo presentado en la Figura 5) se está presentando que los dos segmentos se bisecan. Para ella, uno biseca a otro pero no los dos. (Le da la palabra a un estudiante, señalándolo.) ¿De acuerdo? ¿Qué dices?

Camilo: ¡No! [En desacuerdo con Elisa]. Ahí se cumplen las condiciones porque es que el punto *D* es también de ese segmento, de *CD*.

Varios: (Murmullos)

Profesor: ¡Ah! Tal vez, Camilo está pensando igual que aquel grupo (con el índice señala al grupo de Molly) ¿cierto?

Cuando el profesor pide a los estudiantes opinar sobre la representación hecha por Molly, Elisa plantea una objeción cuestionando si en la figura un segmento biseca a otro. En el interpretante de Elisa parece estar presente la distinción de significado para las expresiones “dos segmentos se bisecan” y “un segmento biseca al otro”. Por eso, ella considera equivocada la representación. Se refiere al enunciado aludiendo a que ambos segmentos se deben bisecar y probablemente tiene una imagen conceptual que incluye una representación diferente, en la que cada uno de los segmentos contiene el punto medio del otro.

El profesor no toma partido; pregunta a los demás estudiantes qué opinan de la objeción de Elisa. Con su intervención: “Para ella [Elisa], uno biseca a otro pero no los dos”, somete a discusión la diferenciación lingüística entre “un segmento biseca a otro” y “los dos segmentos se bisecan”.

Camilo está de acuerdo con Molly. Su imagen conceptual de la bisección de dos segmentos deja ver que, para él, la identificación de la relación “se bisequen” se da en términos de la contenencia del punto medio de un objeto en otro objeto.

Contraste entre la representación hecha y la definición del término “bisecar”

Antonio asocia la representación que están analizando con la definición de “bisecar” que han consignado en los cuadernos dos clases antes. Esto motiva una conversación sobre tal definición. Los estudiantes interpretan que la definición puede hacer referencia a que un objeto biseque a otro o a que ambos objetos se bisequen.

Profesor: […] Y es que, dice Camilo, que *D* pertenece al segmento *CD* y eso es suficiente. ¿Qué dicen? ¿Sí o no? ¿Por qué no, Antonio?

Antonio: Por la definición de bisecar, tiene que contener el punto medio.

Profesor: Sí. ¿Quién? ¿Quién tiene que contener el punto medio?

Dina: Es que no dice si exactamente

Profesor: (A Dina) Espera un momento. A ver, Antonio, otra vez.

Antonio: Tenemos que *AB*… *CD* está bisecando a *AB*.

Profesor: *CD* está bisecando a *AB*, bien.

Antonio: Según lo que decía en la hoja [del enunciado del problema], se bisecaban los dos; entonces tendría que ser el punto medio de los dos.

Profesor: Tendría que ser el punto medio de los dos. Sin embargo, en la construcción que ustedes mismos hicieron (la realizada por el grupo de Antonio)…

Varios: (Risas)

Profesor: En la construcción de ustedes, hicieron esto también, ¿cierto? ¿Por qué lo hicieron, entonces?

Antonio: Fue la primera idea que nos surgió, y después hicimos la otra.

Profesor: ¡Ah!, ya. Y, con esta primera idea que les surgió, ¿qué pasó? ¿Se dieron cuenta de qué o qué? ¿Por qué hicieron la otra?

Laura: Pues, también puede haber otra posibilidad de que se bisequen, que sea el punto medio de los dos segmentos.

El profesor impulsa una conversación sobre la interpretación de Camilo, la cual parece coincidir con la de Molly; gracias a la gestión que promueve, pone en discusión las diferencias en la interpretación del término "bisecar". Observamos tres reacciones diferentes en los estudiantes:

Antonio acude a una versión simplificada de la definición de "bisecar" y la relaciona con el enunciado del Problema. Según él, la definición de "bisecar" implica "contener el punto medio" y el enunciado del Problema pone la condición de que "se bisequen los dos" segmentos, razón por la cual cada segmento debería contener el punto medio del otro. En su explicación, Antonio no se refiere explícitamente a la diferencia entre las expresiones lingüísticas "se bisequen" o "uno biseque al otro", pero pone en juego la primera para interpretar, con la segunda, el enunciado del Problema.

Dina reacciona refiriéndose a la falta de claridad en una enunciación, probablemente de la definición de bisecar. Cuando el profesor le pide a Antonio aclarar a qué objeto se refiere al decir "tiene que contener el punto medio", ella interviene diciendo: "es que no dice si exactamente". Según Dina, como la definición dice: "Un objeto geométrico biseca a un segmento si contiene o es su punto medio" y no dice "Un objeto geométrico biseca a un segmento si contiene exactamente o es su punto medio", es factible tener la interpretación de Antonio o la de Molly. Dina parece considerar semánticamente iguales las expresiones "los segmentos se bisecan" y "un segmento biseca al otro".

Laura está de acuerdo con Dina. Para ella, hay dos interpretaciones de la expresión "se bisecan". Cuando el profesor comenta que Antonio y su grupo hicieron dos representaciones, una en la que el segmento *CD* biseca al segmento *AB* (como la de Molly) y otra en la que *AB* y *CD* se bisecan, y les pregunta por qué hicieron ambas, ella afirma: "Pues, también puede haber otra posibilidad de que se bisequen, que sea el punto medio de los dos segmentos".

Revisión de la definición del término "bisecar"

En vista de que aún no parece haber un consenso, el profesor regresa a la representación hecha por Molly y le pide argumentar por qué la construcción resuelve el problema. Molly intenta usar la definición de "bisecar" que ha consignado en su cuaderno.

Profesor: La pregunta es concreta: las dos cosas que ustedes hicieron, una de ellas es esta (señala el gráfico hecho por Molly, el que se presenta en la Figura 5); ¿esto responde al problema, sí o no? Porque ustedes (señala a Camilo) hicieron también esto. ¿Molly quieres defender tu idea?

Molly: Ja ja ja. Pues… eee, pues a mi modo de ver, la definición de bisecar dice que… o sea… (lee sus notas) si (enfatiza con la voz) el segmento contiene su punto, entonces en el segmento se

Profesor: ¿Su punto…?

Molly: O sea, biseca a un segmento si contiene su punto

Varios: Medio

Molly: No, su punto, o (enfatiza con la voz) es su punto medio… o, es o…

Varios: (Murmullos)

Profesor: ¿Cómo está en la definición? Si contiene o es su punto medio, ¿cierto? Si lo contiene o es su punto medio.

Molly: Ahhh, ok.

El profesor solicita a Molly que defienda la pertinencia de su representación, probablemente para que se dé cuenta de que solo el segmento *CD* biseca al segmento *AB*. La estudiante acude a la definición de "bisecar" que ha consignado en su cuaderno de apuntes, la cual tiene mal escrita, pues le sobra el primer "su punto". Esta frase adicional, probablemente, es interpretada por Molly como: "si contiene un punto o es su punto medio". Por eso para ella, el segmento *AB* biseca al segmento *CD* dado que contiene al punto *D* del segundo segmento. El profesor se da cuenta del error en la consignación de la definición por parte de Molly y pide a los demás revisar sus apuntes. Él mismo rectifica la definición, eliminando la frase sobrante. Con ello, Molly parece caer en cuenta del error de sus apuntes y quizá del porqué de la diferencia de interpretación.

Aclaración de la relación "se bisecan"

Una vez revisada la definición de "bisecar", nuevamente el profesor se refiere a la representación para preguntar cuál segmento es el que biseca al otro segmento, explicar por qué se puede afirmar lo anterior y expresar la relación "los dos segmentos se bisecan" de diferente forma.

Profesor: ¿Qué dice esa definición? Entonces, en este caso (en el tablero señala el dibujo correspondiente a la Figura 5), ¿cuál segmento biseca a cuál?

Juan: *CD* biseca a *AB*.

Profesor: *CD* biseca a *AB*. *CD* es una figura geométrica y biseca a *AD*, ¿por qué?

Juan: A *AB*.

Profesor: A *AB*… Porque contiene su punto medio, que es *D*. Hasta ahí, estamos. Pero, ¿será que *AB* biseca al segmento *CD*, en este caso?

Varios: No.

Profesor: No. ¿Y el enunciado [del Problema] qué decía?

Varios: (Murmullos)

Profesor: Que se bisequen. Es decir, uno biseca al otro y el otro biseca al uno. ¿Ven? O sea que esta opción no funciona (señala el gráfico hecho por Molly). ¿Listo? No funciona porque no corresponde con lo que se está solicitando en el Problema. Acá solamente se está cumpliendo parcialmente la condición: efectivamente un segmento biseca al otro, pero no los dos entre sí. ¿Listo? […]

La gestión del profesor se basa en las interpretaciones que hace de las intervenciones de los estudiantes. Solo al final de la conversación toma partido, cuando cree que debido al trabajo colectivo, el significado se ha afianzado o modificado. Al no conocer la definición de "bisecar" que Molly había consignado en sus apuntes, y que la llevó a proponer la representación de la Figura 5, encaminó sus intervenciones a lograr la distinción entre las expresiones lingüísticas "los dos segmentos se bisecan" y "un segmento biseca al otro". En ese sentido, procuró valerse de las interpretaciones de los estudiantes para producir el significado.

Ejemplo 2. Localización de un punto *B* en un rayo

La siguiente conversación tiene lugar, con los mismos estudiantes, unas semanas después de precisar la definición de bisecar. Nos enfocamos en el uso que se da a un enunciado condicional en la resolución de un problema propuesto por el profesor. Para resolver este problema también se empleó Cabri:

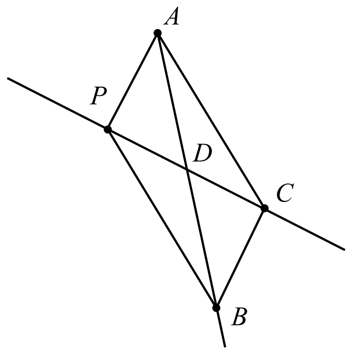
> **Problema Triángulos Congruentes**: Sean la recta *PC* y un punto *A* que no pertenece a la recta, contenidos en un plano. Propongan dos métodos para determinar un punto *B* en el mismo plano, de tal manera que los triángulos *ACP* y *BCP* sean congruentes.

En lo que sigue, se ilustran, con fragmentos de conversación, aspectos de la gestión del profesor en la construcción de significado del enunciado condicional:

> **Teorema Localización de Puntos (TLP):** Dado el rayo *CT* y un número real z, $z > 0$, entonces existe un único punto *X* que pertenece al rayo *CT* tal que la distancia de *C* a *X* es igual a z.

Específicamente, nos centramos en el momento en que el profesor pide a los estudiantes cambiar un paso de la construcción hecha por un grupo para resolver el problema. Los estudiantes (Camilo y Joaquín) han hecho un reporte de la construcción (Cuadro 1) y el profesor se detiene en los pasos cuarto y quinto. A la pregunta del profesor sobre cómo han construido el punto *B*, Joaquín explica que él y su compañero usaron la opción *Circunferencia* del menú de Cabri para determinar el punto *B* en la intersección del rayo *AD* y la circunferencia de centro en *D* y radio la distancia de *D* a *A*.

1. recta PC, segmento PC
2. D punto medio del segmento PC
3. rayo AD
4. punto B tal que D está entre A y B
5. D punto medio del segmento AB
6. triángulos APC y BCP son congruentes



Cuadro 1: Procedimiento de Camilo y Joaquín

Los estudiantes proponen TLP como una alternativa para justificar la determinación del punto *B* en la ubicación deseada

Los estudiantes mencionan que el punto medio D del segmento PC existe gracias al Teorema Existencia del Punto Medio (ya incorporado al sistema teórico). Afirman que, dados los puntos A y D, se puede construir el rayo AD. Después, Joaquín explica el cuarto paso del procedimiento diciendo que usaron la opción Circunferencia del menú de Cabri. El profesor pide a los estudiantes buscar un recurso para construir B y poder justificar su existencia desde la teoría.

Profesor: [Desde la teoría] Podemos construir rectas, podemos construir segmentos, podemos construir el punto medio, podemos construir rayos como decía Camilo [tercer paso de la construcción]. Después debemos construir el punto B como queremos que sea, es decir, que D sea el punto medio del segmento AB. ¿Cómo construimos esto? Porque Joaquín nos dijo que con circunferencia. Vale, pero desde el punto de vista teórico, ¿cómo haríamos una construcción que se pueda validar?

Varios: Con el Teorema de Localización de Puntos.

Varios estudiantes proponen valerse del TLP para justificar la existencia de B. En sus interpretantes parece estar la idea de que cuando el profesor pregunta por una construcción que se pueda validar se refiere a identificar únicamente cómo justificar teóricamente la existencia del punto *B*, sin tener en cuenta las afirmaciones consignadas en el reporte de la construcción. Los estudiantes no ven la necesidad de modificar el procedimiento expresado en el reporte (Cuadro 1) incluyendo las afirmaciones que se requieren para poder usar el TLP como garantía de la existencia del punto, ya que en los tres primeros pasos no se encuentran las condiciones establecidas en el antecedente del Teorema para poder usarlo como garantía de la posible construcción de *B*.

Para usar el TLP no basta mencionar un número y un rayo indeterminados

El profesor aprovecha la oportunidad que le brinda la respuesta de los estudiantes para explorar cómo pretenden usar el TLP en la justificación del procedimiento de construcción del punto.

Profesor: Teorema de Localización de Puntos. ¿De qué manera? En esencia, queremos que aparezca este punto *B*. Acá tenemos *A* y tenemos *D*, ¿cómo haríamos para que aparezca?

Antonio: [Levanta la mano]

Profesor: Antonio.

Antonio: Tenemos la distancia de *A* a *D*; eso va a ser un número… Por el Teorema Localización de Puntos… tenemos el rayo… tenemos ese número, entonces aparece el punto en el rayo.

Profesor: ¿Con que número vas a localizar este punto?

Antonio y Dina: Con la medida de *A* a *D*.

En el interpretante del profesor parece estar la identificación de la necesidad de enfocar la atención de los estudiantes en la producción de una afirmación que corresponda a un paso posterior a los tres primeros del procedimiento relatado (Cuadro 1), que haga posible determinar el punto *B* y garantizar su existencia con el TLP. Para ello, los estudiantes deben referirse explícitamente a la existencia del rayo *AD* y al número que deben escoger convenientemente (el doble de la distancia de *A* a *D*) para ubicar a *B* en dicho rayo.

Para Antonio, el procedimiento para determinar el punto *B* se justifica con el TLP, en el que juegan un papel la distancia de *A* a *D* y un rayo. Sin embargo, no es evidente que él esté proponiendo incluir un paso en la construcción, pues no se refiere con precisión al rayo en el que va a localizar el punto. Suponemos, más bien, que está asociando el proceso de construcción mencionado por Joaquín (circunferencia con centro en *D* y radio la distancia de *A* a *D*) con el rayo opuesto al rayo *DA* o relacionando el rayo *AD* con la ubicación de *B* en este, a una distancia de *D*, igual a la distancia de *A* a *D*. En ambos casos no parece que Antonio vea necesario explicitar cuál es el rayo que se debe tener para hacer, a partir de su origen, la localización de *B*. En ese sentido, más que ver el TLP como una expresión condicional en la que el consecuente se puede afirmar solo si se tienen las condiciones expresadas en el antecedente, parece querer hacer alusión solo a los objetos geométricos mencionados en el teorema. Es decir, parece creer que la acción de garantizar teóricamente una afirmación fuera un mero asunto de nombrar un elemento del sistema y no de aplicarlo, para lo cual es necesario verificar que se tienen las condiciones exigidas en el antecedente y, en caso de que no se tengan, obtenerlas.

Escogencia del número adecuado (¿*w* o su doble?) para determinar el punto *B* en el rayo *AD*

El profesor promueve una interacción comunicativa en busca de precisar lo dicho por Antonio.

Profesor: No señor. ¿Por qué estoy diciendo que no? Antonio no está teniendo en cuenta todo ¿Por qué no? ¿Por qué no? La idea general funciona, pero no hay precisión en ella.

Julia: Digamos *AD* es igual a *w*.

Profesor: *AD* es igual a *w*, (escribe en el tablero) vale.

Julia: Y tenemos el rayo.

Profesor: ¿Qué rayo?

Julia: Eeee… *AD*

Profesor: Tenemos el rayo *AD* (escribe en el tablero: “Sea rayo *AD*”).

Julia: Entonces para localizar a *B*… entonces, digamos el punto *B*… tiene que ser la medida de… *w*

Antonio: De 2*w*

Ángela: *DB* tiene que ser igual a

Antonio: Al doble, tiene que ser el doble.

Julia: (Sonríe y asiente con la cabeza) Sí, sí.

Laura: Tiene que ser, porque si no [es]… localiza al punto *D*.

El profesor interpreta que Antonio va por buen camino, pero que no ha considerado convenientemente el rayo ni el número real, de acuerdo a las especificidades del antecedente del TLP, para poder usarlo como garantía. Por esa vía, Antonio está buscando transformar el procedimiento de manera que contenga información correspondiente al antecedente del TLP para poder garantizar la existencia de *B* con tal teorema.

Julia es quien primero reacciona ante la intervención del profesor. Parece que ella interpreta que la falta de precisión en lo dicho por Antonio está en no haber asignado una letra para referirse adecuadamente a la distancia escogida. El profesor escribe lo que ella dice, a la espera de que los estudiantes se den cuenta de la falta de precisión, por parte de Antonio, al mencionar el número y el rayo que intervendrían en la localización del punto B. Julia continúa en el uso de la palabra mencionando, además de lo dicho por el profesor, una instancia del consecuente del TLP. Con sus intervenciones ofrece un procedimiento de localización de *B* que guarda similitud con el consecuente del TLP.

Antonio y Laura caen en cuenta del error en la determinación del número. Seleccionan el número real adecuado y Laura explica tal selección. Posiblemente se sustraen de su experiencia de construcción en Cabri, se ubican en el mundo teórico para elaborar la instancia pertinente del antecedente del TLP teniendo en cuenta que la localización se hace a partir del origen del rayo *AD*. La intervención de Antonio parece tener efecto sobre el interpretante de Julia, quien asiente admitiendo que el número es 2*w*.

Selección del punto (¿*A* o *D*?) a partir del cual se determina a *B* en el rayo

Ahora el foco de la interacción se centra en el punto a partir del cual se determina *B*. La conversación se da mientras el profesor va completando la escritura de los pasos adicionales del procedimiento, que se asemejan a pasos de deducción de la conclusión necesaria, cuya garantía es el TLP. Hasta el momento, tienen como dados el rayo *AD* y el número 2*w* con *w* igual a la distancia de *A* a *D*.

Profesor:	Existe… A ver, Laura, existe un punto (ha escrito en el tablero: “Existe *B* tal que”)
Laura:	Ah, bueno, sí, tal que la distancia de *D* a *B* es igual a…
Profesor:	Noooo no nonono. ¿Por qué digo que no?, ¿por qué les digo que no?
Antonio:	Tal que *B* pertenece al rayo *AD*
Profesor:	*B* pertenece al rayo *AD* (escribe en el tablero: “Existe *B* tal que *B* pertenece al rayo *AD*”), vale.
Antonio:	y la distancia de *D* a *B*
Profesor:	Noooo no nononono
Ángela:	De *A* a *B*
Profesor:	Ángela, la distancia…
Ángela:	De *A* a *B* tiene que ser igual a dos veces *w*.
Profesor:	Exacto (ha quedado escrito en el tablero: “Existe *B* tal que *B* pertenece al rayo *AD*”) […]

En la conversación identificamos que inicialmente el profesor considera que los estudiantes ya han comprendido cómo transformar los pasos cuarto y quinto del procedimiento de construcción para poder justificar la existencia de *B* y, por tanto, las intervenciones de Laura y Antonio le resultan sorpresivas. Aunque parecía que los dos estudiantes habían interpretado cómo usar el TLP como garantía, declaran la existencia de *B* sin fijarse en que el número real escogido fija la posición de *B* a partir de *A,* y no desde cualquier punto del rayo. Un problema, que se puede apreciar en las intervenciones que tuvieron lugar, radica en no explicitar de manera conjunta el rayo y el número que estaban considerando. Posiblemente, los estudiantes que hacían referencia al número *w* estaban considerando utilizar un rayo distinto al escrito en el tablero por el profesor, por ejemplo el rayo opuesto al rayo *AD*. Por el contrario, Ángela parece haber seguido el hilo de la transformación del procedimiento; su intervención nos indica que su interpretación coincide con la pretendida por el profesor.

Identificación del error en el uso del TLP

En busca de que otros estudiantes, además de Ángela, capten el error en el que incurrieron Laura y Antonio, el profesor pregunta a los estudiantes cuál es dicho error.

Profesor: Exacto (ha quedado escrito en el tablero: "Existe *B* tal que *B* pertenece al rayo *AD* y distancia de *A* a *B es* 2*w"*), porque… ¿cuál es el error… cuando por ejemplo dijeran *DB* igual a *w*?

Laura: (En voz baja) Ahhh, ya.

Profesor: ¿Cuál es el problema si dicen eso?

Antonio: (En voz baja) Queeee

Josefina: (Cara de desconcierto)

Profesor: ¿Cuál es el problema? ¿Por qué no vale decir eso con la teoría que tenemos?

Antonio: Porque es respecto a… (ademán con la mano derecha moviéndola desde un punto, que indica con la otra mano en posición vertical, hacia abajo)

Profesor: ¿Es con respecto a quién que se utiliza el Teorema Localización de Puntos?

Antonio: (En voz baja) Al punto y al rayo

Dina: (En voz baja) Al rayo construido

Profesor: Con respecto al vértice o al punto extremo del rayo, ¿listo? Entonces por esto es que no está bien.

El profesor interpreta que aún hay estudiantes que no ven la obligatoriedad de partir del punto origen y no de cualquier punto del rayo para hacer la localización del punto, si se quiere usar el TLP como garantía. Los gestos y expresiones verbales de los estudiantes, son representaciones cuyo interpretante parece contener la precisión que pretende el profesor, acompañada, para el caso de Antonio y Dina de una representación del rayo *AD* y de *B* a una distancia *2w* de *A*. Con la mediación del profesor se produce la transformación deseada, del paso de construcción que involucra el uso de la circunferencia, a la justificación de la determinación del punto *B*.

Aspectos destacables de la gestión del profesor

En los ejemplos propuestos se evidencian rasgos de la interacción con la que el profesor promueve la construcción de significado de la definición de bisecar y del TLP. Más allá de impulsar la participación de los estudiantes con ideas sobre cómo resolver los problemas planteados, el profesor busca la explicitación verbal de las interpretaciones que están dando en ese momento a los objetos y relaciones involucrados en la situación, fomenta el intercambio, la precisión y ampliación de tales interpretaciones y procura incidir en los interpretantes de los estudiantes con miras a la construcción de los significados pretendidos. A continuación destacamos tres aspectos de la gestión del profesor.

Uno, la gestión incluye un trabajo de interpretación de las expresiones lingüísticas que usan los estudiantes, tanto de aquellas que se institucionalizan verbalmente o por escrito, como de aquellas contenidas en los apuntes de los estudiantes. Un giro lingüístico que podría parecer inocuo, como decir “biseca” en lugar de “se bisecan”, o “si contiene un punto o es su punto medio” en lugar de “si contiene o es su punto medio”, conduce a interpretantes no necesariamente cercanos a los pretendidos.

Dos, en ambos ejemplos vemos que impulsar la tarea de examinar en detalle procesos de construcción de objetos geométricos y pedir justificaciones de tales construcciones es una gestión importante para construir significado colectivamente en el aula. El segundo ejemplo, en particular, ilustra las tensiones que los estudiantes experimentan al proponer procedimientos justificables teóricamente, pues no relacionan los pasos de la construcción con las condiciones específicas dadas en la hipótesis del enunciado de un teorema, para poder valerse de este, al momento de justificar.

Tres, es importante la gestión del profesor en el establecimiento de un puente entre los procedimientos de construcción empírica y los procedimientos para hacer justificaciones deductivas, a partir del impulso a los procedimientos de construcción "justificables teóricamente". En tal gestión, no debe descuidarse la explicitación del ámbito en el que se está trabajando, empírico o teórico, y cuidar el lenguaje en cada uno.

Con los ejemplos, esperamos llamar la atención sobre el efecto que tiene la gestión del profesor en la construcción de significado de un objeto o relación matemática. En la comunicación en el aula coexisten, en una dinámica no exenta de dificultades, las interpretaciones que se hacen de lo que alguien dice y las interpretaciones de dichas interpretaciones. De ahí la importancia de la mediación semiótica que el profesor despliegue en el aula, en favor del aprendizaje de sus estudiantes.

Referencia

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. (pp. 3117-3126). Disponible en http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa

Leonor Camargo y Carmen Samper

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las definiciones en geometría son asuntos polémicos, aun a nivel universitario. Desde la década de 1970, Freudenthal (1978) objetó abiertamente la práctica tradicional de proporcionar definiciones de manera directa a los estudiantes, dado que ello no necesariamente conduce a la conceptualización de los objetos definidos. Argumentando a favor de la idea de Freudenthal, Vinner y Hershkowitz (1980), Vinner (1991) y de Villiers (1998) revelaron datos empíricos que mostraron que conocer la definición de un objeto no es garantía para entenderlo. Probablemente bajo la influencia de Lakatos (1978) para quien la construcción de una definición es el resultado de un proceso investigativo de conceptualización, varios investigadores han buscado opciones para involucrar a los estudiantes en procesos de construcción de definiciones. Incluso, como lo señalan Calvo (2001) y Ouvrier-Buffet (2006), actualmente se reconoce que el proceso de definir tiene importancia similar al proceso de demostrar, razón por la cual es un campo de investigación fructífero.

El propósito de este artículo es presentar varias aproximaciones a la enseñanza de las definiciones, todas ellas basadas en la siguiente premisa: las definiciones en geometría contribuyen a la construcción significativa de conocimiento, en la medida en que se usen para algo más que para asociar un nombre a un conjunto de representaciones gráficas; este uso depende del reconocimiento de la bicondicionalidad de la relación entre un conjunto de propiedades de un objeto[1] y el nombre que se le asigna al objeto que cumple dichas propiedades. Este reconocimiento se logra en un proceso paulatino que comienza con actividades de construcción de definiciones e identificación de las características incluidas en una definición y culmina cuando se hacen operativas las definiciones en la producción de cadenas deductivas.

Las ideas que presentamos sobre cómo aprovechar las definiciones para construir significado provienen de nuestra experiencia docente e investigativa centrada en el aprendizaje de la geometría, en dos cursos de nivel universitario de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas.

En el primer curso, Elementos de Geometría, la intención es complementar la formación secundaria con el propósito de preparar a los alumnos para que puedan acceder con bases firmes al estudio teórico de la geometría euclidiana. Se busca proporcionar, en un ambiente activo y constructivo, herramientas necesarias para la formación de conceptos, para el establecimiento de propiedades geométricas a partir de la exploración, y para el uso eficaz de técnicas, métodos y lenguaje geométricos. Mediante un acercamiento informal que invita a los alumnos a hacer conjeturas con base en la exploración empírica, se propicia el desarrollo de procesos de visualización, construcción de conceptos, argumentación y justificación. En este contexto, se involucra a los estudiantes en procesos de definir objetos geométricos con el objetivo de ampliar el significado que de ellos puedan tener inicialmente y de lo que es una definición.

En el segundo curso, Geometría Plana, se hace la primera aproximación teórica a la geometría. Para ello, se involucra a los estudiantes en procesos de resolución de problemas abiertos, con el apoyo de un programa de geometría dinámica, que los llevan a formular conjeturas y a validarlas con definiciones, postulados o teoremas de un sistema geométrico teórico que se conforma gradualmente en el curso, siguiendo la pauta sugerida por George Birkhoff (1884-1944), pero con variaciones propias de las dinámicas de producción colectiva del sistema a partir de las conjeturas que formulan los estudiantes. En este curso, los estudiantes participan en la evaluación de definiciones construidas en el curso anterior, cuando los objetos definidos hacen parte de los

1 Con el término "objeto" nos referimos a los entes o relaciones de interés matemático, de índole geométrica.

problemas propuestos, y en hacer operativas las definiciones, para usarlas en demostraciones.

Acercamiento constructivo a las definiciones

Dos propósitos del curso Elementos de Geometría tienen que ver con las definiciones: uno, aprender a definir objetos geométricos y dos, aprender a extraer información de una definición. En el primer caso, se trata de poder construir un enunciado verbal que determine de manera clara, precisa y sin redundancias, un objeto geométrico a partir de un conjunto de propiedades. En el segundo caso, se trata de poder sacar conclusiones derivadas de una definición para, por ejemplo, producir un argumento deductivo. En esta sección nos referimos a ambos propósitos.

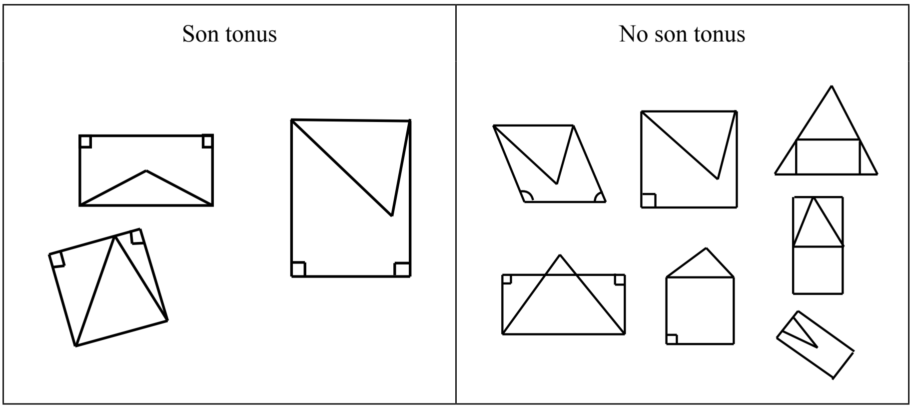
Construcción de una definición a partir de ejemplos y no-ejemplos

Uno de los acercamientos constructivos a las definiciones consiste en proporcionar a los estudiantes un conjunto de representaciones gráficas que son ejemplos de un objeto que se quiere definir y un conjunto de representaciones gráficas que no son ejemplos del objeto (no-ejemplos). Se trata de que el estudiante describa de la manera más completa posible cada ejemplo, elabore una lista de las propiedades en cada caso y compare las listas para identificar qué propiedades son comunes a todos los ejemplos y cuáles son específicas de solo algunos de ellos; estas últimas propiedades deben ser catalogadas como irrelevantes para la definición. Al obtener una lista de propiedades comunes se describe el objeto, sin ambigüedades, a partir de las propiedades necesarias. Al revisar los no-ejemplos, es probable que en cada muestra se identifiquen algunas propiedades relevantes, pero no todas, hecho que justifica que la representación no sea un ejemplo y se reafirme el conjunto de propiedades necesarias. A partir de la identificación de las propiedades necesarias se puede proponer una definición. La definición debe incluir las propiedades necesarias y suficientes para definir el objeto, es decir, sin que falten o sobren propiedades. Nos referimos a propiedades necesarias como aquellas que obligatoriamente deben estar incluidas en la definición. Por ejemplo, al definir cuadrado es necesario decir que es un cuadrilátero (o un tipo particular de cuadrilátero). La suficiencia se refiere a que no esté incluida una propiedad que se pueda deducir de alguna necesaria. Por ejemplo, es suficiente decir que un paralelogramo tiene diagonales congruentes, para definir rectángulo, sin mencionar ángulos rectos.

El éxito de la actividad está en la riqueza de los ejemplos y no-ejemplos con base en los cuales se construye la definición. Los ejemplos deben ser diversos, lo que implica que además de todas las propiedades que caracterizan el objeto, deben tener otras propiedades no relevantes y diferentes. Así mismo, los no-ejemplos deben ser escogidos cuidadosamente para no proponer representaciones obvias, sino aquellas que demanden un análisis cuidadoso para revisar qué propiedades necesarias faltan por identificar.

La construcción de definiciones a partir de ejemplos y no-ejemplos es útil para el caso en el que la definición involucre dos o más propiedades, pues ello favorece la elaboración del conjunto de ejemplos y no-ejemplos. También es conveniente poner en juego este acercamiento tanto con objetos que sean familiares a los estudiantes como con objetos desconocidos, incluso inventados. Las definiciones de cuadrilátero, paralelogramo, ángulos que son par lineal, altura, mediana, punto medio, etc. pueden construirse por esta vía.

A manera de ejemplo, presentamos el caso de la construcción de la definición de los objetos "tonu" y mediana de un triángulo, ejercicios que proponemos a estudiantes del curso Elementos de Geometría (Figura 1).



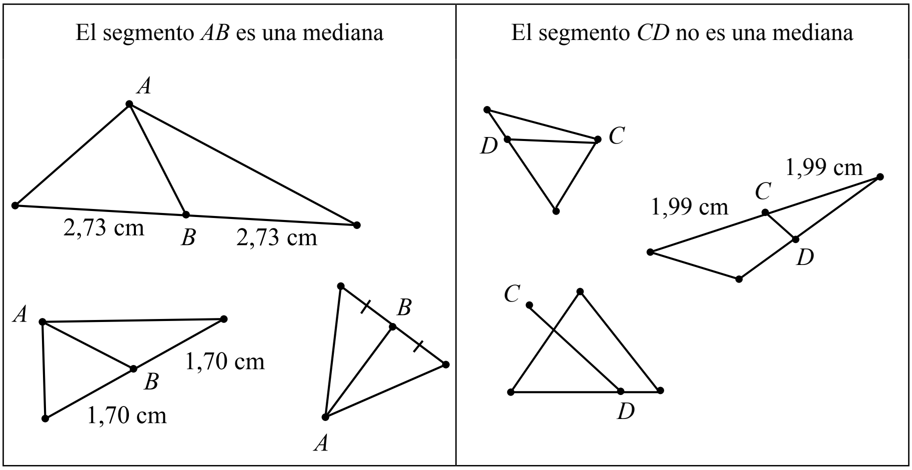


Figura 1: Ejemplos y no-ejemplos de tonu y mediana

Con respecto al tonu, generalmente los estudiantes se refieren inicialmente a rasgos como: tiene al menos dos ángulos rectos consecutivos, hay un cuadrilátero y un triángulo, un lado del triángulo es un lado del cuadrilátero, el cuadrilátero y el triángulo comparten un lado pero no es el que contiene los vértices de los ángulos rectos, el vértice del triángulo está en el interior del cuadrilátero o en el lado del cuadrilátero determinado por los vértices de los ángulos rectos. A partir de tales caracterizaciones se proponen diversas definiciones, usualmente extensas, pero poco a poco se puede llegar a la siguiente definición que reúne las propiedades necesarias y suficientes.

> **Definición de tonu**: Es la unión de un cuadrilátero y dos segmentos de recta; el cuadrilátero tiene dos ángulos rectos consecutivos; los dos segmentos tienen un extremo común el cual está en el interior del cuadrilátero o sobre el lado del cuadrilátero que contiene los vértices de los ángulos rectos, y el otro extremo de cada segmento es un vértice del cuadrilátero que no corresponde a los ángulos rectos consecutivos.

Esta definición, como cualquiera otra, la interpretan los estudiantes de acuerdo al significado de los otros objetos que se mencionan en ella. En este caso, puede ser problemático el significado de ángulos consecutivos por lo cual conviene acordar a qué se está haciendo referencia, para el caso de ángulos internos de un polígono convexo. En ciertos textos, los ángulos internos de un polígono cuyos vértices son extremos de un mismo lado de la figura también son llamados ángulos adyacentes.

En cuanto a la definición de mediana de un triángulo, es posible que los estudiantes quieran expresarla en términos del punto medio, lo cual lleva a la necesidad de introducir la definición de punto medio de un segmento; pero se puede definir sin hacer uso de tal término.

> **Definición de Mediana de un Triángulo**: es un segmento con un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en un punto del lado opuesto que determina, en este, dos segmentos congruentes cuyos extremos no comunes son los otros dos vértices del triángulo.

Al ir aumentando el número de objetos estudiados, las definiciones se pueden ir modificando para incluir nuevos objetos. Además, algunos objetos que inicialmente se usan de acuerdo a la acepción informal, también se pueden definir, como el caso de "segmento".

Según de Villiers (1994), el proceso de elaborar una definición puede ser descriptivo o constructivo. Es descriptivo cuando, a partir de diversos ejemplos y no-ejemplos se determina un subconjunto de las propiedades que tiene el objeto, al cual se le asigna el nombre escogido. Implica poder reconocer qué propiedades se pueden deducir de otras y decidir el conjunto mínimo de propiedades que lo definen. Es constructivo cuando, a partir de un objeto bien caracterizado, se toma la decisión de alterar el conjunto de propiedades que lo definen, bien sea suprimiendo o agregando propiedades, y se construyen ejemplos y no-ejemplos del nuevo objeto. Este proceso lleva a construir relaciones de contenencia de objetos definidos. Por ejemplo, si la definición de triángulo equilátero como triángulo con tres lados congruentes, la modificamos para considerar un triángulo con dos lados congruentes, diremos que el triángulo equilátero es un caso especial de este último objeto, que puede ser nombrado como triángulo isósceles.

Las definiciones se pueden enunciar de dos maneras diferentes según que su estructura lingüística sea explícita o implícita (Kublikowski, 2009). En una *definición explícita* (completa) se incluyen un término para el objeto que se va a definir y las propiedades que determinan el objeto que se está definiendo. El término y las propiedades del objeto están conectados por expresiones como: *es* o *si y solo si* cuando lo que se define está expresado verbalmente.

Ejemplos de definiciones explícitas son: "Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes" y "Dos circunferencias son concéntricos si y solo si están en el mismo plano y tienen el mismo centro". Una *definición implícita* (parcial) se presenta en la forma de una proposición condicional "p si q". Es el modo habitual de expresar una definición que, a pesar de ser una proposición bicondicional, se expresa como condicional. Por ejemplo: "Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, tienen en común uno de sus lados y no tienen puntos interiores en común".

Construcción de una definición a partir de la caracterización de lugares geométricos

Un segundo acercamiento constructivo a las definiciones se hace a partir de la construcción de un lugar geométrico de puntos y la identificación de los invariantes de tal lugar, es decir, de aquellas propiedades geométricas comunes a todos los puntos. Este acercamiento se favorece con el uso de instrumentos de trazo que permiten la construcción de muchos puntos del lugar, como los programas de geometría dinámica; sin embargo, con unos cuantos puntos también se puede hacer.

La construcción de la definición de circunferencia se puede hacer a partir de la representación de ejemplos o casos particulares del lugar geométrico, por diversas vías. Bien sea con regla no graduada y compás o con un programa de geometría dinámica, se puede pedir a los estudiantes que i) construyan un conjunto de puntos del plano que equidisten de un punto fijo (para centrar la atención en la distancia entre los puntos y el centro) o ii) que construyan el lugar geométrico del extremo de un segmento cuando este rota sobre el otro extremo, sin cambiar de longitud, en un plano (para centrar la atención en la congruencia de los segmentos cuyo extremo común es el centro). Una vez que hayan construido los casos particulares (ejemplos) de los dos lugares geométricos y los hayan relacionado con una circunferencia, se puede introducir la definición.

> **Definición de Circunferencia**: La circunferencia C con centro O, siendo O un punto de un plano, el conjunto de puntos P del plano que equidistan de O, es decir, para los cuales la distancia de O a P es constante.

La construcción de la definición de mediatriz de un segmento se puede hacer por una vía similar. Se pide a los estudiantes que construyan el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos (los extremos del segmento). La Figura 2 ilustra tres estrategias que se pueden seguir, si se usa un programa de geometría dinámica, para obtener el lugar geométrico de puntos que equidistan de los extremos del segmento *AB*.

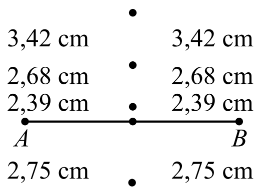
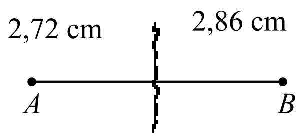
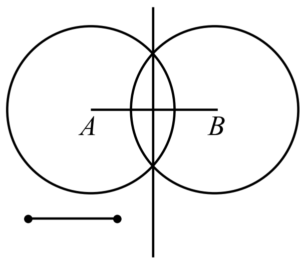
<table>
<tr><td>
</td><td>Mediante la técnica del “hilvanado” construyendo varios puntos, uno por uno.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Por arrastre, a partir de un punto que cumpla la condición, procurando mantener la equidistancia a los extremos. La traza del punto describe el lugar geométrico.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Usando un segmento “control” como radio de circunferencias construidas usando los extremos como centro. Una vez construido el punto intersección de las circunferencias, se activa la traza de dicho punto y se varía la longitud del segmento.</td></tr>
</table>

Figura 2: Estrategias para construir la mediatriz como lugar geométrico

Cualquiera de de las estrategias da lugar a la representación gráfica de la mediatriz y a la búsqueda de propiedades geométricas que permitan caracterizarla. Se llega a dos posibles definiciones de mediatriz de un segmento.

Definición de Mediatriz de un Segmento (1): Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Definición de Mediatriz de un Segmento (2): Recta perpendicular al segmento, que contiene el punto medio de este.

La decisión de cuál definición adoptar depende del uso que se vaya a hacer de la misma. Generalmente, la primera es útil cuando se trata de construir otros lugares geométricos, mientras que la segunda se puede aprovechar en procesos deductivos que requieran justificar ciertas propiedades.

Una vez caracterizado el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de un punto dado, y el lugar geométrico de puntos que equidistan de dos puntos fijos dados, cabe preguntarnos cuál es el lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de tres puntos fijos dados, *A, B* y *C*. Para resolver este problema, se puede aplicar inicialmente la condición a dos puntos, por ejemplo *A* y *B*, y construir la mediatriz correspondiente; luego, se aplica la condición a otros dos puntos, por ejemplo *B* y *C,* y se construye el lugar geométrico correspondiente; finalmente se encuentra la solución mediante la intersección de las mediatrices.

El acercamiento descrito se basa en la construcción de figuras representantes de los objetos que se quieren definir, usando diversos instrumentos de construcción. Es una vía de trabajo útil cuando se tiene cierta familiaridad con los objetos pero no se ha hecho un estudio cuidadoso de su definición. Es una propuesta sugerida, entre otros por Chassapis (1999), en la década de 1990, que puso en práctica supuestos socioculturales sobre el aprendizaje, como aquel que afirma que el conocimiento está mediado por los instrumentos que se tienen a disposición para acceder a él. La propuesta ha cobrado vigencia hoy por la posibilidad que se tiene de poner a disposición de los estudiantes diversos artefactos que hacen ostensivas diferentes propiedades de los objetos involucrados.

Construcción de definiciones a partir de propuestas de conjuntos de propiedades necesarias y suficientes y su contraste con representaciones

Esta estrategia es útil para el caso de objetos con los que los estudiantes estén familiarizados, por tener una correspondencia cercana con formas de objetos presentes en el ámbito social y cultural o porque se ha hecho un acercamiento escolar informal. Es el caso de la construcción de definiciones de figuras geométricas planas como triángulo, cuadrilátero, paralelogramo, rombo, cuadrado, rectángulo, ángulo, ángulos adyacentes, altura de un triángulo, tetraedro, prisma, cubo, etc. Además de favorecer un acercamiento constructivo a las definiciones, se promueve un cambio en la idea de que solo existe una definición para los objetos geométricos; por el contrario, la conceptualización es más rica entre mayor número de definiciones se conozcan, se identifique la equivalencia entre ellas (Zaskis y Leikin, 2008) y se establezcan relaciones entre las propiedades que se explicitan en una definición o en otra.

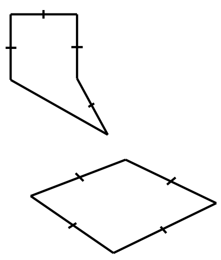
La estrategia consiste en pedir a los estudiantes que propongan definiciones del objeto geométrico y realicen un análisis colectivo detallado de las propuestas. Los estudiantes tienen que: representar ejemplos y no-ejemplos, identificar qué propiedades deben incluirse en ciertas definiciones para evitar generar no-ejemplos, seleccionar qué propiedades serían innecesarias por poderse deducir de otras. El análisis conduce a escoger las definiciones que realmente caracterizan el objeto y tienen la mínima cantidad de atributos necesarios.

El análisis de las definiciones propuestas conduce a la identificación de definiciones correctas, es decir, aquellas que mencionan las propiedades necesarias para que quede clara e inequívocamente determinado cuál es el objeto definido. Puede suceder que una definición sea correcta aunque tenga algunas propiedades innecesarias. Por ejemplo, se puede definir un rectángulo como un paralelogramo con cuatro ángulos rectos o como un paralelogramo con un ángulo recto. La primera definición es correcta aunque no sea necesario incluir que los cuatro ángulos son rectos; es suficiente mencionar tres ángulos rectos porque la propiedad de ser recto del otro ángulo se deriva de lo ya dicho. Aunque las dos definiciones son correctas, al ir avanzando en el nivel de escolaridad se privilegian las definiciones con el menor número de propiedades, para facilitar posteriores chequeos en representaciones y para favorecer el razonamiento deductivo. El análisis para determinar si alguna de las propiedades se puede eliminar es útil para comprender el papel de cada propiedad necesaria en la definición.

Las definiciones incorrectas son aquellas que no mencionan todas las propiedades necesarias o mencionan una propiedad que no puede tener el objeto, pues entra en contradicción con las propiedades necesarias. Por ejemplo, la definición de circunferencia como el conjunto de los puntos que equidistan de un punto fijo es incorrecta porque no contiene todas las propiedades necesarias. Falta agregar que todos los puntos, incluyendo en centro, están en un plano. Otro ejemplo de definición incorrecta es la de rectángulo como paralelogramo con un ángulo recto y diagonales no congruentes. Si el paralelogramo tiene un ángulo recto, no es posible que las diagonales no sean congruentes, por lo cual la definición es incorrecta.

El proceso descrito puede conducir a proponer definiciones para otros objetos, en la medida en que el análisis muestre que la caracterización corresponde a un objeto diferente, pero que a este último lo determina en forma precisa. Por ejemplo, si a la definición de cuadrado como cuadrilátero con sus ángulos rectos y sus lados congruentes se le quita la primera propiedad se genera la definición de rombo. Es un proceso que mencionamos previamente, que guarda cierta analogía con la propuesta de de Villers (1994) quien sugiere promover en el aula ejercicios de eliminación de propiedades en definiciones conocidas, para evaluar qué consecuencias se derivan de la definición reformulada e incluso llegar a proponer nuevos objetos.

En la Tabla 1 presentamos algunas propuestas de definición de cuadrado sugeridas por estudiantes universitarios. En la segunda columna se indica si la definición es correcta (menciona todas las propiedades necesarias, lo cual permite separar en dos grupos cualquier colección de objetos: los que son instancias del objeto y los que no) o incorrecta (no incluye todas las propiedades necesarias o menciona una propiedad que no puede tener el objeto). En la tercera columna se presentan no-ejemplos o ejemplos, en los casos en los que la definición es incorrecta o es correcta, respectivamente. En la cuarta columna se precisa cuáles son las falencias de la definición propuesta en términos de las propiedades necesarias y suficientes.

Definición	Correcta/ Incorrecta	No ejemplos/Ejemplos	Falencias
Una figura geométrica cerrada con cuatro lados congruentes.	Incorrecta.		Son necesarias pero no son suficientes.

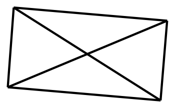
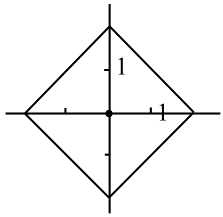
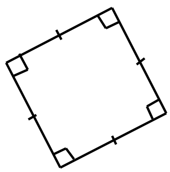
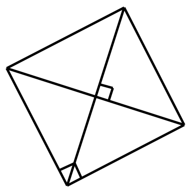
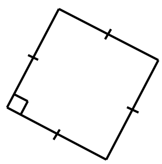
Un polígono que tiene diagonales de igual longitud.	Incorrecta.		Son necesarias, pero no son suficientes.
Un cuadrilátero cuyos vértices están colocados en (x, y) $(x+1, y)$ $(x, y+1)$ y $(x+1, y+1)$.	Incorrecta.		Es suficiente, pero no es necesaria.
Un cuadrilátero regular.	Correcta.		Ninguna.
Un rectángulo con diagonales perpendiculares.	Correcta.		Ninguna.
Un cuadrilátero con todos los lados congruentes y un ángulo de 90°.	Correcta.		Ninguna.

Tabla 1: Propuestas de posibles definiciones de cuadrado

El acercamiento a la construcción de definiciones se puede ampliar para, además de identificar si las definiciones mencionan propiedades necesarias y suficientes, analizar cuáles definiciones son equivalentes. Se trata de determinar si, dadas dos definiciones, el conjunto de ejemplos es el mismo (Winicki-Landman y Leikin, 2000) y de aprovechar el análisis detallado de cada definición para estudiar las implicaciones que tiene asumir una definición u otra en los procesos de justificación. Por ejemplo, las dos definiciones siguientes de ángulo recto son equivalentes porque determinan el mismo conjunto de ejemplos:

> **Definición de Ángulo Recto (1)**: Un ángulo recto es el que conforma con otro un par lineal[2] y es congruente a aquel.
>
> **Definición de Ángulo Recto (2)**: Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90°.

También puede ser interesante estudiar si las definiciones adoptadas conducen a conformar conjuntos disyuntos de objetos o a que unos conjuntos de objetos sean subconjuntos de otros, según las relaciones de inclusión de las propiedades. De Villiers califica el primer tipo de definiciones como particionales y al segundo tipo como jerárquicas (de Villiers, 1994). Por ejemplo, si se define trapecio como el cuadrilátero con exactamente un par de lados opuestos paralelos, esta definición no incluye a los paralelogramos y se generan dos clases de objetos disyuntos (definición particional); pero si se define trapecio como el cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos, los paralelogramos son un tipo especial de trapecios (definición jerárquica).

Es importante identificar cuál es la funcionalidad de las definiciones jerárquicas. Por ejemplo, además de identificar que un cuadrado puede ser un rombo, según como se defina rombo, o que un triángulo equilátero puede ser isósceles, según como se defina triángulo equilátero, es importante entender que ese tipo de definiciones es útil cuando la información que se obtiene para un objeto se puede extender a otro. Por ejemplo, si por alguna vía se llega a identificar que las diagonales de un rombo son perpendiculares se puede usar tal información para garantizar que las diagonales del cuadrado también lo son, siempre y cuando se haya definido el rombo de tal suerte que incluya al cuadrado. Es decir, la posibilidad de establecer definiciones jerárquicas simplifica la conformación de sistemas teóricos que contengan el conjunto de propiedades que caracterizan los objetos definidos. En todo caso, el hecho de poder establecer una jerarquía en la clasificación de los objetos a través de las

2 **Definición Ángulos Par Lineal**: Si los rayos *AB* y *AD* son opuestos y *C* es un punto que no pertenece a la recta *AB*, entonces los ángulos *BAC* y *CAD* son par lineal.

definiciones muestra que estas son arbitrarias y que es el profesor o autor del texto quien aprovecha o no esa característica de una definición.

A medida que se avanza en el nivel de escolaridad, es importante ir perfeccionando las definiciones que se adoptan, pues ellas son útiles no solo para determinar un objeto sino porque ellas pueden ser eslabones de cadenas deductivas y, así, cumplirían un papel importante en la justificación matemática. Algunas características que conviene ir introduciendo paulatinamente en la escuela se listan a continuación. Una definición debería ser:

- Precisa: no menciona información innecesaria.
- Económica: menciona el conjunto mínimo de propiedades necesarias, no redundantes, que determinan el objeto.
- Concisa: encapsula varias propiedades en una sola aprovechando otras definiciones.
- Contingente: no necesaria, es una de varias definiciones posibles.
- Clara: incluye solo términos conocidos que refieren a otros objetos previamente definidos.

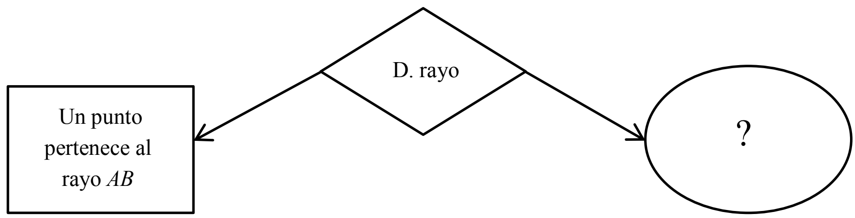
Uso de definiciones para obtener información

Además de aprender a construir definiciones como un aspecto de la conceptualización de objetos es importante aprender a usar definiciones conocidas para obtener información. Este aprendizaje es indispensable en situaciones específicas que requieren obtener información de carácter espacial o métrico, en las que puede estar incluido un objeto cuya definición se conoce.

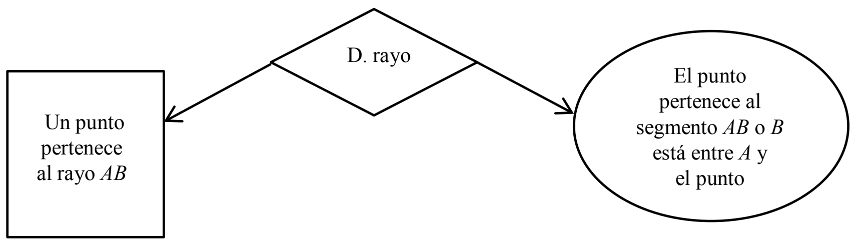
Para favorecer la obtención de información, sugerimos usar un tipo de diagrama que Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) denominan diagrama-definición. Está constituido por tres marcadores de posición. Los marcadores de posición tienen diferentes formas para indicar funciones diferentes de las proposiciones que los pueden sustituir. Uno tiene forma de rombo y se destina para el nombre del objeto cuya definición se está considerando; sirve de puente entre las proposiciones que remplazan a otros dos marcadores de posición, uno de forma rectangular y otro con forma de óvalo. La elección de la forma de rombo lleva a evocar con relativa facilidad dos flechas opuestas que apuntan a los dos conjuntos de información conectados por la definición. Pretende poner de manifiesto la naturaleza bicondicional de una definición. Su colocación en un nivel diferente al del óvalo y el rectángulo indica que ha de recurrirse a la definición para poder obtener información. Los otros dos marcadores de posición se distinguen en su forma con el propósito de indicar que la información que cada uno de ellos refiere, aunque equivalente, juega una función diferente: en uno, se escriben las propiedades que se conocen o están dadas en la situación; en el otro, se consigna la información que se obtiene, gracias a poner en juego la definición. Veamos algunos ejemplos del uso del diagrama-definición.

Ejemplo 1. Sabemos que un punto pertenece al rayo *AB*, ¿qué información se puede concluir sobre el punto?

De acuerdo con la descripción del diagrama-definición se coloca en el rombo el nombre del objeto cuya definición se va a usar, rayo, precedido de una "D." con la que se pretende indicar que se trata de la "definición de". En el rectángulo, se escribe la información proporcionada.

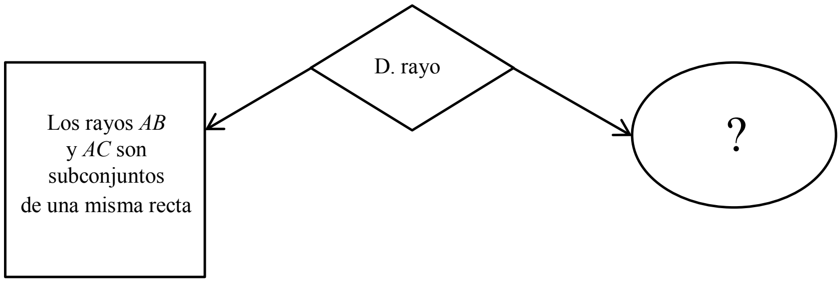


Al revisar la definición de rayo (i. e., Dada la recta *AB*, el rayo *AB* es la unión del segmento *AB* y todos los puntos *P* para los cuales *B* está entre *A* y *P*) podemos completar la información en el óvalo escribiendo información nueva sobre el punto: pertenece al segmento *AB* o *B* está entre *A* y el punto. Si se quiere, se puede asignar un nombre al punto, pero debe ser claro que en este caso la letra representa una variable, pues no no refiere a un punto específico. Es el contexto de la situación el que indica cuándo una letra denota un único punto y cuándo no. El diagrama se completaría así:

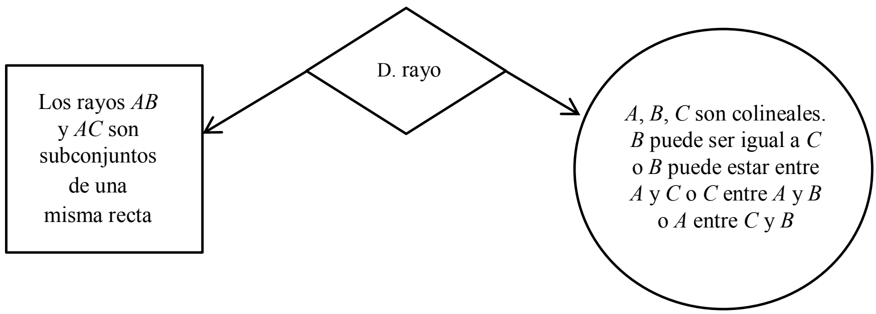


El diagrama se lee así: "como un punto pertenece al rayo *AB*, por la definición de rayo, el punto puede pertenecer al segmento *AB* o *B* puede estar entre *A* y el punto". Así, es la definición de rayo la que permite obtener la información.

Ejemplo 2. Determinar si la respuesta al siguiente interrogante es Sí, No, No se sabe y justificar la respuesta: Los rayos *AB* y *AC* son subconjuntos de una misma recta, ¿el punto *A* es la intersección de los dos rayos?



Con la información que se tiene y la definición de rayo podemos obtener la siguiente información: *A*, *B* y *C* son colineales; *B* puede ser igual a *C; B* puede estar entre *A* y *C* o *C* puede estar entre *A* y *B* o *A* puede estar entre *C* y *B*. Solo si *A* estuviera entre *C* y *B*, el punto *A* sería la intersección de los rayos. Por lo tanto la respuesta es: No se sabe.



Uso de definiciones en la producción de demostraciones

Uno de los aspectos centrales de la conceptualización de los objetos geométricos consiste en aprender a usar las definiciones en la producción de demostraciones. Tal uso y el de las definiciones en la resolución de problemas de geometría destacan la importancia de las definiciones en la actividad matemática.

En el uso de las definiciones en un proceso deductivo se aprovecha la bicondicionalidad de la relación entre el objeto nombrado que se define y las propiedades necesarias y suficientes que lo determinan. Dependiendo de que se tenga el término o las propiedades, las definiciones se usan en dos sentidos. En un sentido, se parte de un conjunto de propiedades, algunas dadas desde el inicio y otras que se van obteniendo en el curso de la demostración, y si se advierte que el objeto puede ser útil en el proceso que se está llevando a cabo, y su existencia se ha establecido previamente, se declara que se tiene tal objeto para valerse de él posteriormente. En el otro sentido, se parte de establecer como dado el objeto, y se hacen deducciones a partir de las propiedades que menciona la definición, poniendo en juego dichas propiedades. En las dos secciones que siguen explicamos y ejemplificamos ambos usos.

Tratamiento de las definiciones en demostraciones: De las propiedades al objeto

En el curso de la demostración de algunos teoremas, especialmente los de existencia, se van produciendo proposiciones válidas con respecto a un objeto específico en las que se establecen las propiedades que lo determinan como un cierto objeto, con lo cual es posible concluir que es un ejemplo de tal objeto. En ese caso, se procede de las propiedades al objeto definido.

Hay procesos demostrativos en los que no todas las propiedades necesarias de un objeto surgen en un flujo deductivo directo, pero se percibe la importancia de declarar que un objeto específico es ejemplo del objeto en cuestión; en esos casos, el curso de la demostración se ajusta para que en algunos pasos se declaren las propiedades faltantes y pueda usarse la definición de interés.

A continuación vamos a presentar un ejemplo del tratamiento que estamos describiendo. Corresponde a un teorema que se trabaja en el curso de Geometría Plana, en el que se demuestra que si se tienen tres puntos no colineales *A, B,* y *C,* es posible construir dos segmentos *AB* y *CD* que se bisecan.
Ejemplo. Como parte de la solución al problema, los estudiantes deben demostrar que el segmento *AB* biseca al segmento *CD* propuesto.

> **Definición de Bisecar**: Un objeto geométrico biseca a un segmento si es su punto medio o lo contiene.

En el desarrollo de la demostración, se tiene que justificar deductivamente que el punto de intersección, *M*, de los segmentos está entre *C* y *D*, y que la distancia de *C* a *M* es igual a la distancia de *M* a *D*, siendo *M* el punto medio del segmento *AB.* Una vez demostradas esas dos propiedades, por la definición de bisecar se puede concluir que el segmento *AB* biseca al segmento *CD.*

La definición de bisecar hace referencia a la definición de punto medio, la cual a su vez requiere haber asegurado que *M* equidista de *C* y *D* y que *M* está entre *C* y *D,* es decir que los tres puntos son colineales. Pero como se ha afirmado que es punto de intersección, ello garantiza la colinealidad.

Tratamiento de las definiciones en demostraciones: Del objeto a las propiedades

Otra situación se presenta cuando en las condiciones dadas inicialmente (hipótesis del enunciado que se va a demostrar) o en el curso de la demostración se declara que se tiene un objeto (“sea …”), cuya existencia se ha justificado previamente, y en la demostración se aprovecha esta información para elaborar nuevos pasos. Hemos denominado a este proceso “hacer operativa” la definición, en consonancia con Bills y Tall (1998, citado en Selden, 2012), quienes señalan que un estudiante hace operativa una definición si es capaz de usarla creativa y significativamente en un argumento formal.

A manera de ejemplo ilustrativo, vamos a explicar el proceso de hacer operativa la definición de rayo en el curso de la demostración del siguiente Enunciado (Figura 3):

> Dados tres puntos no colineales *A, B* y *C*, si *D* pertenece al rayo *CM*, *D* es diferente de *C, M* punto medio del segmento *AB*, y la distancia de *C* a *M* es igual a la distancia de *M* a *D*, entonces el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan .

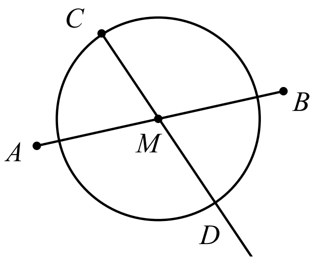


Figura 3. Representación del Enunciado

La demostración requiere justificar teóricamente que el punto *M* también es punto medio del segmento *CD* para así poder concluir que los segmentos *AB* y *CD* se bisecan. Ello exige demostrar que: i) *M* está entre *C* y *D* y ii) que la distancia de *C* a *M* es igual a la distancia de *M* a *D*. La segunda condición está dada. Falta solo demostrar la interestancia (*M* está entre *C* y *D*). Como en la hipótesis del Enunciado se menciona que *D* pertenece a un rayo, hay que valerse de la definición de rayo para poder asegurar que se tiene la mencionada interestancia. Para ello, se requiere hacer operativa la definición de rayo.

Hacer operativa la definición de rayo implica tres instancias de intervención sobre la definición:

1. A partir de la definición de rayo (*CM* es un rayo si y solo si es la unión del segmento *CM* con el conjunto de los puntos *X* para los que *M* está entre *C* y *X*), la pregunta acerca de la pertenencia de un punto a un rayo conduce a reconocer que la definición está dada en términos de la unión de dos conjuntos disyuntos. Es decir, el punto *D* pertenece al rayo *CM* si y solo si *D* pertenece al conjunto unión del segmento *CM* y los puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X*.
2. En términos de disyunción de proposiciones, que surge de la definición de unión de conjuntos, la pertenencia de un punto a un rayo puede expresarse así: *D* pertenece al conjunto unión del segmento *CM* y los puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X* si y solo si *D* pertenece al segmento *CM* o *D* pertenece al conjunto de puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X*.
3. Con la identificación de la pertenencia de *D* a uno de los conjuntos surgen dos posibilidades de interestancia:
   (a) *D* pertenece al segmento *CM* si y solo si *D* pertenece a la unión del conjunto de puntos *Y* que están entre *C* y *M* con el conjunto de puntos *C* y *M*. Esto, a su vez se puede expresar en términos de disyunción de proposiciones, dando lugar a: *D* pertenece al conjunto de puntos *Y* que están entre *C* y *M* o *D* pertenece al conjunto de puntos *C* y *M*.
   (b) Al mencionar que *D* puede pertenecer al conjunto de puntos *X* tales que *M* está entre *C* y *X*, la interestancia está explícita.

Recapitulando, en términos del análisis anterior se tiene: (*M* está entre *C* y *D*) o (*D* está entre *C* y *M*) o (*D* puede ser *C*) o (*D* puede ser *M*). Este recorrido deja ver un aspecto de la conceptualización de rayo, derivada de su definición, y el posible uso de esta como garantía en un paso de demostración. En síntesis, el uso de la definición lleva a identificar las dos posibles interestancias que existen entre un punto cualquiera del rayo y los dos puntos que lo determinan.

El proceso de hacer operativa una definición no es sencillo para los estudiantes, aun si son de nivel universitario. Con frecuencia se tiende a considerar que basta mencionar que el punto *D* está en el rayo *CM* para asegurar la posibilidad de dos interestancias. Por ejemplo, en un experimento de enseñanza que se llevó a cabo con estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas (Camargo, Perry, Samper, Saénz-Ludlow, en prensa), el profesor preguntó a los estudiantes "¿Qué podemos decir si *D* pertenece al rayo *CM?*". Un estudiante respondió: "Que.. ¿hay interestancia?... *C, M, D,* o *C, D, M*". Posiblemente identifica en la representación gráfica del rayo *CM,* la posibilidad de ubicar al punto *D* en dos posibles lugares con respecto a *C* y a *M* y considera que la definición de rayo puede ser una herramienta teórica para concluir directamente las posibles interestancias. Esta respuesta conduce al profesor a guiar a los estudiantes para que hagan operativa la definición, paso a paso, tal como se explicó previamente. Con la intención de guiar el acercamiento de los estudiantes a los objetos matemáticos presentes en la interacción comunicativa, el profesor aprovecha la oportunidad que brinda la demostración del Enunciado para contribuir a la evolución de la conceptualización de rayo, haciendo operativa su definición.

En esta última sección enfocamos uno de los aspectos centrales relativos a las definiciones y su papel en la conceptualización, en el marco de la actividad demostrativa. Se trata del uso de las definiciones en la producción de demostraciones. Desde nuestro punto de vista, este uso promueve la conceptualización de los objetos. Esto se logra al ir más allá de su aproximación como objetos figurales que deben ser diferenciados de otros, para aprovechar la riqueza que brinda la proposición bicondicional que los define; así se garantizan propiedades útiles en pasos de demostración. Este acercamiento es fundamental en el nivel universitario si el trabajo se lleva a cabo en el marco de sistemas teóricos donde las definiciones tienen un papel central en la construcción de cadenas deductivas.

Debido a la inherente complejidad del proceso de definir, parece irrazonable esperar que los estudiantes lleguen por sus propios medios a las definiciones formales, a menos que ellos sean guiados didácticamente a través de ejemplos del proceso de definir, el cual puedan ellos después usar como modelo para hacer sus propios intentos. Más aun, la construcción de definiciones es una actividad matemática de no menor importancia que otros procesos como la resolución de problemas, la formulación de conjeturas, la generalización, la demostración, etc. Es inexplicable que haya sido ignorado en muchas enseñanzas de las matemáticas.

Referencias

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral* (Tesis doctoral). Universitat Autónoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona.

Camargo, L., Perry, P., Samper, C. y Sáenz-Ludlow, A. (en prensa). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al operacionalizar su definición. *Enseñanza de las Ciencias.*

Chassapis, D (1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*(3), 275-293.

de Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch:.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Kublikowski, R. (2009). Definition within the structure of argumentation. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *16*(29) 229-244.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid, España: Alianza Universidad.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 259-282.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). El enunciado condicional: actuaciones problemáticas y diagramas para abordarlas. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 35-56). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). Berkeley, EUA: PME.

Winicki-Landman, G. y Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 17-21.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). *Exemplifying definitions: A case of a square*. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 131-148.

¿Es esto “machetear”?

Carmen Samper y Patricia Perry

Introducción

Demostrar en matemáticas es una actividad compleja que requiere, entre otras cosas, trabajar comprensivamente dentro de un sistema axiomático, con base en un sistema lógico que establece las maneras lícitas de proceder. Es necesario distinguir el estatus teórico (Duval, 2007) de los diferentes elementos que conforman el sistema axiomático: definiciones, postulados, y teoremas; es decir, identificar qué caracteriza a cada uno de estos elementos en cuanto a estructura lógica, su papel dentro del sistema y su alcance y, por ende, reconocer diferencias entre tales elementos. Por ejemplo, una definición, cuyo formato lógico corresponde a un enunciado bicondicional, aunque no se expresa así explícitamente, asocia un término con unas propiedades; en cambio, tanto un teorema como un postulado enuncian, a través de respectivas proposiciones condicionales, la relación de dependencia entre dos conjuntos de condiciones o de propiedades. Así mismo, se requiere entender el estatus operativo (Duval, 2007) de las proposiciones que intervienen en un paso de deducción cualquiera: premisa, aserción y garantía; es decir, reconocer qué datos son imprescindibles para poder usar un elemento teórico como garantía de una aserción. También se requiere identificar cuál esquema de razonamiento válido permite deducir información que podría ser útil para llegar a la aserción que se quiere demostrar.

Estudios recientes han reportado diferentes dificultades que enfrentan los estudiantes de nivel universitario para poder producir demostraciones exitosamente (cf. Selden y Selden, 2011; Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006).

Los investigadores coinciden en que las problemáticas que se evidencian tienen que ver, entre otras cosas, con: la estructura lógica de los argumentos[1] y el encadenamiento de estos en una demostración, la comprensión y el manejo lógico de los enunciados de los elementos teóricos, y las técnicas para producir demostraciones. Específicamente, relacionado con esto último, mencionan que a los estudiantes les resulta difícil: identificar cuándo la demostración exige el estudio de varios casos y entender que cada uno se debe demostrar; saber cuándo, en la demostración, se toma un elemento cualquiera de un conjunto dado, o cuándo se debe elegir convenientemente para que pueda pertenecer a un conjunto específico; demostrar teoremas cuyo consecuente expresa una conjunción o una disyunción de propiedades. Si los estudiantes han tenido la oportunidad de producir justificaciones en la clase de matemáticas, posiblemente tienen una imagen conceptual de lo que es una demostración que también puede generar dificultades. Esto porque es muy probable que solo hayan trabajado con demostraciones directas en las que los datos de cada argumento o paso de la demostración es algo dado o son aserciones deducidas en pasos anteriores, y los argumentos se enlazan de manera directa usando el esquema de razonamiento *Modus Ponendo Ponens*; la demostración fluye suavemente. Pero, la realidad es que no hay un procedimiento fijo para producir demostraciones. Tal como lo señalan Hanna et al. (2009) citado en Dreyfus, Nardi y Leikin (2012), "Las distinciones matemáticas entre demostraciones se basan en aspectos lógicos, estructurales, relativos al campo específico de las matemáticas, relativos a la representación, y en propiedades relacionadas con los enunciados de las demostraciones" (p. 198; nuestra traducción).

En un curso formal de geometría euclidiana es necesario demostrar la existencia de muchos objetos como, por ejemplo, un punto entre dos puntos dados, el punto medio de un segmento, la bisectriz de un ángulo, la recta perpendicular a una dada por un punto externo, la recta paralela a una dada. De Guzmán, Hodgson, Robert y Villani (1998) indican que hay diversas razones por las cuales las demostraciones de existencia son particularmente difíciles para los estudiantes. Dada su experiencia escolar previa, no ven la necesidad de demostrar que algo existe; una tal demostración se contrapone a la práctica habitual en la que se plantean y resuelven problemas sobre objetos que

1 Aquí entendemos por *argumento* un enunciado oral o escrito, de estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (datos y aserción) y una proposición general (garantía).

existen. Estos investigadores mencionan además que otra dificultad yace en tener que imaginarse el objeto matemático específico que debe ser construido. En esencia, la explicación de estas dificultades se puede encontrar en la brecha que hay entre la matemática escolar y la actividad matemática que se espera que haga un estudiante universitario.

Debido a la singular creatividad conceptual que se requiere para producir una demostración de existencia, es necesario que los estudiantes aprendan procedimientos especiales para ello. En consonancia con lo que se mencionó anteriormente, las demostraciones de teoremas de existencia difieren en términos de aspectos estructurales. En algunos casos, se debe usar el Axioma de Escogencia (e. g., demostrar que existe una base para los números reales como espacio vectorial sobre los números racionales); en otros, se debe producir una demostración por contradicción (e. g., demostrar que existen infinitos números primos). En la geometría elemental, demostrar la existencia de un objeto geométrico puede requerir la determinación de un objeto específico, considerando solo algunas propiedades del objeto cuya existencia se quiere demostrar; las demás propiedades de ese objeto tendrán que deducirse a partir de las asignadas inicialmente al objeto específico. Pero, ¿cómo se sabe cuáles propiedades asignar inicialmente?

En este artículo presentamos evidencia de la forma espontánea en que proceden los estudiantes para demostrar la existencia de un objeto geométrico caracterizado por dos propiedades. La estrategia empleada se aleja mucho de lo que acepta la comunidad del discurso matemático. Ilustramos la mediación semiótica del profesor durante la producción de la demostración.

La estrategia espontánea de los estudiantes y temas que enmarcan su tratamiento en el aula

Definición matemática y existencia del objeto definido

En el ámbito de la actividad matemática y, más puntualmente, de la actividad demostrativa es necesario entender que un objeto matemático no existe simplemente porque se haya dado una definición de este dentro de un sistema teórico. Es decir, la mayoría de las definiciones matemáticas conllevan solamente la posibilidad de existencia. Esto parece ser un asunto conceptual problemático desde la antigüedad. Aristóteles no solo lo menciona sino que provee una clasificación de las definiciones de acuerdo con este asunto. Él propone que hay definiciones, conocidas en la actualidad como nominales, en las que se da una lista de las características generales de un objeto o relación, y definiciones, denominadas reales, en las que se dan las condiciones bajo las cuales existe un objeto (Harari, 2004). Por ejemplo, una definición nominal establece que ángulo recto es aquel cuya medida es 90 grados sexagesimales, mientras que una definición real establece que es aquel para el cual existe un ángulo par lineal[2] con él y congruente a él. Aunque Euclides no se refiere explícitamente a este asunto, su obra refleja que lo toma en cuenta. Por ejemplo, define cuadrado (Definición 22, Libro I) pero no usa la definición hasta que justifica su existencia (Proposición 46, Libro I), a través de la validación de la construcción del cuadrado con regla y compás (Euclid, Densmore y Heath, 2003). Es decir, el cuadrado no existe gracias a su definición sino a que su construcción es no solamente una posibilidad sino un hecho.

Mediación semiótica del profesor

En un curso en el que el propósito principal es la construcción social de significado, el profesor busca la participación interactiva y genuina de los estudiantes. La aproximación metodológica de la enseñanza y el aprendizaje no consiste, por ejemplo, en enunciar un teorema y reproducir su demostración en frente de los estudiantes con la expectativa de que ellos la entiendan, la memoricen y extraigan elementos generales para aplicar en casos similares que se trabajen posteriormente. En cambio, se procura que los estudiantes generen ideas y las expongan ante la comunidad del aula para colaborar en la producción colectiva de la demostración, acción que favorece la construcción de significado y el progreso en la interpretación de lo que es el proceso de demostrar. Asuntos relacionados con la producción y reproducción de demostraciones han sido el tema de varios investigadores (e. g., Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2007; Dreyfus, Nardi, y Leiking, 2012).

2 **Definición Ángulos Par Lineal**: Si los rayos *AB* y *AD* son opuestos y *C* es un punto que no pertenece a la recta *AB*, entonces los ángulos *BAC* y *CAD* son par lineal.

Bajo esta perspectiva de enseñanza y aprendizaje, cuando los estudiantes hacen un esfuerzo por conceptualizar el objeto matemático que se está tratando en clase, hay una interacción dialógica entre ellos y el profesor, conformada por una secuencia de signos de diferente naturaleza. Un signo es una expresión lingüística, gestual, pictórica o de otra especie que una persona pone en lugar de un objeto. Es decir, es una palabra, frase o argumento hablado o escrito, un gesto o gráfico con lo que la persona representa algún aspecto del objeto al cual alude en la comunicación. Ese signo, si es percibido e interpretado por otro, produce en la mente de ese intérprete una idea que posiblemente trata de comunicar. En el contexto descrito anteriormente, el profesor y los estudiantes que se involucran en la conversación tienen diferentes niveles de conocimiento respecto al objeto matemático y metas distintas. La meta del profesor es apoyar al estudiante en la construcción de significado del objeto mientras que la de los estudiantes debe ser la participación genuina en dicho proceso. Es decir, los estudiantes deben asumir su papel de colaboradores, activando sus recursos intelectuales relativos al tema de discusión para hacer propuestas, aunque puedan tener errores, y defenderlas, o argumentar matemáticamente su desacuerdo con ideas que otros presentan (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013). El profesor media semióticamente cuando evoca sus significados de ciertos aspectos del objeto matemático, foco de la conversación, y los usa en acciones que pueden ayudar a sus estudiantes a lograr mayor compatibilidad con el significado que la comunidad de discurso matemático acepta para tal objeto; cuando él identifica aspectos del objeto matemático en los cuales se debe enfocar para aclarar el significado, porque reconoce que la construcción de significado de sus estudiantes no se está desarrollando de manera aceptable. La mediación semiótica intencional del profesor son todas sus acciones deliberadas que buscan propiciar y guiar las ideas de los estudiantes para que evolucionen y converjan hacia el concepto del objeto matemático. Lo anterior muestra cómo, en un acto de interpretación de los signos de sus estudiantes, el profesor debe contemplar el objeto matemático desde dos perspectivas: la matemática y la didáctica (Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2014).

"Tomar al azar y forzar propiedad": estrategia espontánea de los estudiantes

Para entender en qué consiste la estrategia que, de manera espontánea, sugieren los estudiantes para demostrar la existencia de un objeto geométrico, imagínese la siguiente situación. El sistema teórico de geometría euclidiana que se usa está basado en el modelo propuesto por Birkhoff (1932) en el que se introducen como postulados los hechos que corporeizan la regla y el trasportador. Suponga que quiere afirmar y justificar válidamente que entre dos puntos dados *A* y *B*, siempre existe un punto *C*; es decir, existe un punto *C* que pertenece a la recta *AB* y para el cual la suma de las distancias de *A* a *C* y de *C* a *B* es igual a la distancia de *A* a *B*. Cuenta con el siguiente sistema teórico local (Tabla 1):

Definición	**Interestancia**: El punto *C* está entre *A* y *B* si: i) *A*, *B* y *C* son colineales, y ii) la suma de las distancias de *A* a *C* y de *C* a *B* es igual a la distancia de *A* a *B*.
Postulados	**Conjuntos de Puntos**: Las rectas y los planos son conjuntos no vacíos de puntos. **Recta - Números Reales**: Dada una recta, se puede establecer una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que: i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real; ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta. El número real que le corresponde al punto *A* se llama la coordenada del punto y se denota por c(*A*). **Dos Puntos - Recta**: Si *A* y *B* son dos puntos, entonces existe una única recta *m* que los contiene.
Teoremas	**Interestancia - Orden**: *A*, *B* y *C* son tres puntos. Si *B* está entre *A* y *C*, entonces $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$. **Orden - Interestancia**: Dados tres puntos *A*, *B* y *C* de la recta *m*, si $c(A) < c(B) < c(C)$ o $c(A) > c(B) > c(C)$, entonces *B* está entre *A* y *C*. **Recta - Infinitos Puntos**: Si *m* es una recta entonces existen infinitos puntos en *m*.

Tabla 1: Sistema teórico local (parte 1)

¿Cómo proceder? Para asegurar que existe un punto *C* entre los puntos *A* y *B* dados, es imprescindible poder señalar un punto y asegurar que tiene dos propiedades. ¿Cuál de las dos se abordará primero? ¿Es indistinto cuál se aborde primero? Si no, estamos ante una disyuntiva. ¿Cón qué criterio se tomará la decisión de cuál propiedad abordar primero? Hay dos posibles caminos. A continuación presentamos el esquema de dos estrategias, la primera de las cuales es típica de los estudiantes:

1) Crear la recta m que contiene los puntos dados A y B (usando el Postulado Dos Puntos - Recta). Tomar un punto C de la recta m (usando el Teorema Recta - Infinitos Puntos). Asignarle a los puntos A, B y C respectivamente las coordenadas x, y, z de tal manera que $x < y < z$ (usando el Postulado Recta - Números Reales i)). Concluir que C está entre A y B (usando el Teorema Orden - Interestancia).
2) Crear la recta m que contiene los puntos dados A y B (usando el Postulado Dos Puntos - Recta). Asignar coordenadas x y y respectivamente a los puntos A y B tal que $x < y$ (Postulado Recta - Números reales i)). Escoger un número z tal que ($x < z < y$) o ($x > z > y$) y asignarle el punto C de la recta m que le corresponda (Postulado Recta - Números Reales ii)). Concluir que C está entre A y B (usando el Teorema Orden - Interestancia).

¿En alguna de las estrategias anteriores se está "macheteando"? La respuesta está en el siguiente comentario del profesor:

> Si yo digo que existe un punto C en la recta, puedo ser muy de malas, pues ese punto C puede que esté por acá (ha dibujado la recta AB y ha marcado el punto C tal que A está entre B y C) porque no le he puesto condiciones; o puedo ser tan de malas que el punto C coincida con el punto A (marca a C coincidente con A). Entonces, ¿qué es lo que debemos hacer? Pues, determinar [al punto C] de manera que ya lleve consigo las propiedades que se quiere que tenga. Entonces, ¿qué hago primero? Estos [A y B] tienen unas coordenadas: x y y. Entonces, primero determino un número que cumpla una relación de orden (sobre la recta que ha trazado en el tablero escribe: $z < t < y$ o $z > t > y$), con eso cuando se escoja el punto (marca en la recta un punto que corresponde al número t), automáticamente tiene una condición muy especial, que es la que yo quiero. ¿Qué condición especial? Que esté entre los otros dos. ¿Por qué sé que C no va a estar ni por acá ni va a ser A? Porque ya tengo un teorema (señala el enunciado del Teorema Orden - Interestancia) que garantiza que una relación de orden entre coordenadas implica interestancia. ¿Ven el camino? Quiero ser muy claro en esto, porque siempre se presenta ese error.

> Toman el punto y después le asignan una coordenada especial para que cumpla la condición que yo quiero que tenga. Más bien, que el punto se determine con las propiedades que debe tener.

Con estas palabras, el profesor explica implícitamente, respecto a la primera estrategia, en qué consiste "machetear": **Tomar al Azar** un punto cualquiera y después **Forzar una Propiedad** en él (**TAFP**). Esta propuesta se aleja mucho de lo que acepta la comunidad del discurso matemático pues no hay cómo validar, desde una teoría consistente, la acción de obligar a un objeto **cualquiera** a tener una propiedad **especial**. Para exponer mejor la problemática, presentamos a continuación una escena de clase en la que se evidencia la mencionada estrategia y el esfuerzo del profesor por guiar a los estudiantes hacia la comprensión de la estrategia correcta para demostrar la existencia de un objeto geométrico. En este episodio de clase, que tuvo lugar en un curso universitario formal de geometría euclidiana, los estudiantes tienen que demostrar la existencia del punto medio de un segmento.

Demostración de la existencia del punto medio de un segmento

Precisamente en la clase siguiente a aquella en la que el profesor se refirió a la estrategia TAFP, él propuso la tarea de demostrar la existencia del punto medio del segmento *AB*. Para realizarla, además de los elementos que incluye la Tabla 1, los estudiantes contaban con los siguientes elementos teóricos (Tabla 2):

Definiciones	**Segmento**: Dados dos puntos *A* y *B*, el segmento *AB* es la unión del conjunto de los puntos *A* y *B* con el conjunto de todos los puntos que están entre *A* y *B*. **Punto Medio**: *M* es punto medio del segmento *AB* si: i) *M* está entre *A* y *B*, y ii) la distancia de *A* a *M* es igual a la distancia de *B* a *M*.
Teoremas	**Punto Entre**: Dados dos puntos *A* y *B*, existe un punto *C* entre ellos. **Punto a un Lado**: Sean *A* y *B* dos puntos. Existe un punto *C* tal que *B* está entre *A* y *C*.

Tabla 2: Sistema teórico local (parte 2)

Como se mencionó anteriormente, un procedimiento general para demostrar la existencia de un objeto geométrico cuya definición incluye dos o más condiciones consiste en elegir o determinar mediante una construcción un objeto específico que satisfaga algunas de las condiciones en cuestión, unas que se puedan validar teóricamente de manera directa, y luego mostrar que el objeto así determinado también cumple las demás condiciones que la definición le impone al objeto cuya existencia se quiere demostrar. En el caso del Teorema Existencia del Punto Medio, se comienza la demostración determinando un punto M que satisface su equidistancia a los extremos A y B del segmento (Definición Punto Medio ii)) y luego se demuestra que el punto está entre A y B (Definición Punto Medio i)). La determinación del punto M se logra al: 1) crear la recta determinada por los puntos A y B; 2) asignar coordenadas a los puntos A y B (Postulado Recta - Números Reales i)); 3) determinar el promedio de esas coordenadas; 4) asignarle a ese número el punto M de la recta que le corresponde (Postulado Recta - Números Reales ii)). El último paso es demostrar que M está entre A y B, gracias a la propiedad de los números reales que asegura que el promedio de dos números está entre ellos, y al Teorema Orden-Interestancia.

Recuento y análisis del episodio en el que surge la estrategia TAFP

La presentación sucinta del episodio y el análisis de este se hacen considerando fragmentos transcritos de las interacciones entre quienes participaron en la producción de la demostración. Al exponer una cita de algún participante, indicamos, entre corchetes cuadrados, el número de la intervención en la transcripción completa. El propósito de esta información es dar una idea del flujo de la interacción a través de la cual ocurrió el episodio.

El primer paso de la demostración es tomar un punto entre *A* y *B*

Como de costumbre, el profesor comunica la tarea para la sesión de clase: “Vamos a justificar que si se tiene un segmento AB, entonces este tiene exactamente un punto medio” [1]. Enseguida solicita el primer paso de la demostración. Laura plantea: “Que existe un punto […] **En medio de** A y B...” [9, 11]. Ángela añade: “Tiene que haber un punto **entre** A y B” [12]. A la pregunta del profesor, “¿Cómo escribo eso?” [13], para impulsar que se formalice la propuesta, Laura responde: “Con el Teorema Punto Entre” [14]. Las alumnas repiten su propuesta mientras el profesor la consigna en el tablero. Él pregunta: “¿Por qué se les ocurre que podemos utilizar ese teorema?” [27], a lo que responde inicialmente Ángela: “Porque necesitamos un punto que esté entre esos dos (pulgar e índice de la mano derecha extendidos como para representar la separación entre los extremos de un segmento) para decir…” [28], idea que completa Laura “Para poder hallar el punto medio. Para decir que ese X está en medio de A y B” [29].

Las palabras que hemos destacado en letra negrilla nos llevan a pensar que las alumnas han evocado un segmento y su punto medio, y posiblemente la definición de punto medio de un segmento. Es claro que la expresión de Laura “en medio de” se refiere solo a tomar un punto entre los dos puntos dados. Al aludir al Teorema Punto Entre, claramente no piensan en asignarle al punto otra propiedad especial, lo cual nos indica que están convencidas de que inicialmente deben crear un punto que satisfaga la interestancia. Esto se confirma con las explicaciones que dan posteriormente del porqué usan el teorema mencionado.

Cabe notar que el profesor no indica de manera alguna si la propuesta de las estudiantes es la forma correcta de comenzar la demostración o no. Con sus preguntas y solicitud de explicación, ofrece a la clase la oportunidad de revisar y modificar la propuesta expuesta.

¿Se detecta algún problema en la propuesta?

Como se verá en lo que sigue, parece que el profesor tiene como hipótesis que las estudiantes van a incurrir en la estrategia TAFP, ya que la propuesta consiste en tomar un punto que satisfaga una interestancia y, de esa manera, la única opción posible es forzar la propiedad de equidistancia. Su siguiente intervención incluye no solo una expresión verbal sino también una ilustración de la situación. Su mediación comienza con la solicitud de proveer las condiciones requeridas para que un punto sea punto medio de un segmento. Varios estudiantes indican correctamente que son dos: interestancia y equidistancia. El profesor comenta: "Con esto que harían Laura y Ángela, ya tendríamos parte del asunto que necesitamos, la interestancia. Pero, yo quiero que ustedes me digan (mirada a todo el grupo) si esa forma de hacer la demostración está bien o no. Hasta ahí, ¿están ustedes de acuerdo con lo que ellas proponen o ven algún problemita con ello?" [33]. Como no recibe la respuesta deseable, pues los estudiantes creen que el problema está en la falta de formalismo teórico de la propuesta, él insiste: "En términos de representación gráfica lo que tenemos hasta el momento es algo como esto (en el tablero dibuja un segmento de extremos A y B), y después ellas proponen que exista un punto X que cumpla la relación X está entre A y B. ¿Qué creen ustedes?" [41].

Como vemos, el profesor no hace explícito que la estrategia propuesta sea errónea; en cambio, indaga con la intención de que sean los estudiantes los que reconozcan la acción TAFP. Pretendiendo ayudarlos, representa el segmento en el tablero esperando que los estudiantes plasmen la propuesta de Laura y Ángela en una imagen y visualicen que la posición de X en el segmento puede ser cualquiera.

El problema es la manera de determinar el punto *X*

Tras la insistencia del profesor en revisar la propuesta de Laura y Ángela, María tímidamente interviene: "Es que el X aparece como que… como **gratis**… aparece" [48]. El profesor le solicita aclarar su idea: "Apareció y cuando uno aparece, ¿dónde puede aparecer ese punto entre A y B?" [51]. Otro estudiante responde: "En cualquier parte del segmento" [52]. Esta respuesta da lugar a que el profesor se refiera de nuevo a la inaceptabilidad, desde la matemática, de la estrategia TAFP: "En cualquier parte del segmento. Entonces, ¿qué tal que X aparezca por acá? (En el segmento AB representado en el tablero, marca un punto X muy próximo a A.) O que X aparezca por acá (marca otro punto en el segmento). ¿Y queremos que aparezca por allí o queremos que X sea muy especial? ¿En dónde queremos que aparezca X? En términos gráficos, solamente como por aquí ¿sí o no? (señala en la figura del tablero) para que ese X sea efectivamente el punto medio. Si nosotros hacemos lo que tenemos acá (señala la propuesta de Laura y Ángela), entonces después ustedes a este punto que ya se tiene, lo van a obligar a que cumpla condiciones. ¿Se acuerdan? ¿Y, yo qué les decía ayer?" [53], y continúa con esta idea: "Que mejor que cuando se determinara el puntico ya se le asignaran las condiciones que queremos. ¿Ven el asunto lo distinto que es? Ayer yo les decía: van a cometer este error con frecuencia…" [55].

María interpreta la solicitud del profesor de examinar la propuesta de Laura y Ángela como objeción al contenido y no a la justificación que presentan ellas para su propuesta. Su uso de la palabra "gratis" parece indicar que reconoce que en la propuesta existe la libertad de tomar cualquier punto del segmento. Su objeción puede significar que entiende que, de continuar con lo que proponen Laura y Ángela, se llegaría a TAFP. La intervención del profesor nos lleva a pensar que él supone que los estudiantes han entendido que, debido a la posición aleatoria del punto X en el segmento, no se podrá deducir la equidistancia de tal punto a los puntos A y B, a partir de la interestancia.

Determinar el punto que tiene exactamente la coordenada que se necesita… ¿es eso "machetear"?

Descartada la propuesta de Laura y Ángela, el profesor da una idea general, con escasa explicación, del procedimiento para demostrar la existencia del punto medio: "Entonces, en algún momento efectivamente vamos a tener que encontrar la interestancia, en algún momento, pero este no es. Más bien, que la interestancia surja como producto de otra construcción que vamos a tener que hacer. Entonces, ese paso, por lo pronto, no (borra el tercer paso registrado en el tablero). Listo, entonces ¿cómo hacemos para construir este puntico X (señala en la figura del tablero el que sería el punto medio del segmento y borra los otros dos puntos que había marcado), para que tenga las condiciones que queremos que tenga? ¿Qué se les ocurre que podemos hacer? Que se determine con algo, con lo que quiero que tenga" [57]. Juan entiende que habiendo descartado la opción de comenzar asignando la propiedad de interestancia a un punto, no queda sino otra opción: "Ponerle la condición de que AX [la distancia de A a X] sea igual a XB [la distancia de B a X]" [58]. Así, Juan explicita la acción por hacer pero no dice cómo llevarla a cabo. Es Dina quien, con poca seguridad, propone: "Si se le asignan coordenadas a A y a B, cuando se determine el punto X se le da la característica… ¿sería como muy "macheteado"?"

[62]. Cuando el profesor le pregunta exactamente en qué consiste el "machete", ella dice: "Darle a *X* la distancia exacta entre *A* y *B*" [64].

De las intervenciones de Juan y Dina inferimos que su interpretación de punto medio de un segmento incluye la equidistancia a los extremos del segmento y que el uso de coordenadas es el medio para determinar el punto *X*. Sin embargo, para Dina proceder de este modo es asignar una propiedad muy exigente al punto, razón por la cual duda de la pertinencia de su propuesta. Una vez aceptada la propuesta de determinar al punto *X* con una condición específica de distancia, se alude a qué coordenadas asignarle a los puntos dados *A* y *B* (Postulado Recta - Números Reales i)), y se discute cómo determinar convenientemente, a partir de esas coordenadas, el número que a su vez determine precisamente al punto *X* (Postulado Recta - Números reales ii)).

Demostración de la existencia de la bisectriz de un ángulo

En una sesión de clase ocurrida tres meses después de aquella en la que tuvo lugar el episodio anteriormente relatado, se aborda la tarea de demostrar la existencia de la bisectriz de un ángulo. Surge la tarea debido a que tal objeto fue mencionado por algún grupo de estudiantes en la resolución del problema en que se les pedía construir, con geometría dinámica, dos ángulos adyacentes congruentes y justificar teóricamente las acciones realizadas en la construcción. Comienzan por enunciar como definición de bisectriz de ángulo, la siguiente:

> **Bisectriz de un Ángulo**: Dado el ángulo *ABC*, el rayo *BD* es su bisectriz si: i) los ángulos *ABD* y *DBC* son congruentes, y (ii) el punto *D* pertenece al interior del ángulo *ABC* .

Enseguida, tiene lugar una interacción dialógica entre estudiantes y profesor. Él inicia el proceso de producción de la demostración diciendo: "El ángulo *ABC* es dado. Seguimos con el segundo paso. ¿Cuál sería el segundo paso? ¿Qué es lo que necesitamos que aparezca?". De esta manera, el profesor pretende insinuarles que deben tener en cuenta cómo van a determinar el objeto geométrico sobre el cual versará la demostración de existencia. Algunos estudiantes responden que se necesita un rayo con un punto en el interior del ángulo y que además determine, con los lados del ángulo original, dos ángulos adyacentes congruentes, es decir, mencionan las dos condiciones involucradas en la definición de bisectriz de un ángulo. Según su respuesta, parecen haber interpretado la pregunta como "qué objeto queremos tener al final de la demostración" y no "de qué objeto vamos a partir para hacer la demostración". Entonces el profesor pregunta: "¿Qué hacemos para determinar ese rayo con esas propiedades? ¿Qué debemos hacer?". Ángela responde y explica, por solicitud del profesor, que se tiene que "Crear el punto *D*. Entonces existe el punto *D*, tal que… que pertenezca al interior del ángulo", respuesta que el profesor interpreta como una instancia de TAFP. Interpretamos esto a partir de su reacción: "¡Ah, de una vez! Vamos a decirlo de una vez. Pues, de chévere, y listo, tomamos el punto que esté en el interior. ¿Qué hacemos con él?", palabras que acarrean un sentimiento de inconformidad con la propuesta. El silencio prolongado de los estudiantes podría indicar que no ven cómo desarrollar esa propuesta de forma teóricamente válida. Molly expresa esto al decir: "Por ahí no sería. Porque *D* quedaría en cualquier lugar del interior del ángulo".

Al igual que la definición de punto medio de un segmento, la definición de bisectriz de un ángulo se formula en términos de la conjunción de dos propiedades. Desde el punto de vista de la lógica, la demostración podría comenzar enfocándose en cualquiera de las dos propiedades, con lo cual surgen dos estrategias para la demostración: i) proseguir como propone Ángela, tomando cualquier punto *D* en el interior del ángulo o ii) localizar, usando el teorema[3] que lo permite, un rayo *AD* tal que la medida del ángulo *DAB* sea la mitad de la medida del ángulo *ABC*. En el primer caso, habría que forzar al punto para que quedara en una posición tal que el rayo de extremo en *B* y determinado por el mencionado punto diera lugar a un ángulo cuya medida fuera un medio de la medida del ángulo *ABC*. Esto es "machetear". En el segundo caso, se debería demostrar que el rayo *AD* localizado tiene puntos en el interior del ángulo *ABC.* Desarrollar esta estrategia es exigente, pero con ella no se "machetea". Además los estudiantes ya contaban con todos los elementos teóricos necesarios.

3 **Teorema Construcción de Ángulo**: Sean un rayo *AB*, en un plano α, y r un número real tal que $0 < r < 180$. Entonces existe un único rayo *AD* tal que *D* está en alguno de los semiplanos determinados por la recta *AB* en α, y la medida del ángulo *DAB* es r.

Al comparar superficialmente acciones de los participantes en el intercambio dialógico de los dos episodios es notorio que en ambos es Ángela quien propone la estrategia TAFP; pero en el segundo es Molly, no María, quien identifica por qué la estrategia es errónea. En el segundo episodio, en su intervención el profesor no explicita que la propuesta de Ángela sea errónea, pero al parecer Molly interpreta las palabras del profesor como una indicación de que no es la forma de proceder, razón por la cual explica por qué la propuesta de Ángela no es correcta.

Consideraciones finales

Hay varios asuntos que queremos destacar, relacionados con las demostraciones de existencia en el ámbito de la geometría, la estrategia TAFP empleada espontáneamente por los estudiantes y la mediación del profesor.

Un examen de las dos propiedades que conforman la definición de punto medio de un segmento muestra que la equidistancia es matemáticamente más exigente que la interestancia en el sentido de que aquella es una característica puntual mientras que la interestancia conlleva libertad pues hay infinidad de puntos que cumplen esa propiedad. Así mismo, en la situación de la bisectriz de un ángulo, localizar el rayo para que se determine un ángulo de una medida específica es darle una propiedad más exigente que simplemente tomar un punto en el interior del ángulo. Es bastante probable que de alguna manera, consciente o no tanto, los estudiantes que comienzan a abordar y a entender el procedimiento para hacer demostraciones de existencia se hagan preguntas como, por ejemplo: En una demostración de existencia, ¿se puede partir de un objeto que comparte propiedades tan fuertes con aquel cuya existencia se quiere demostrar? ¿Cuáles y cuántas de las propiedades se pueden asumir desde un principio? Por nuestra parte, como investigadores, nos preguntamos al respecto: ¿Es esta preocupación la que lleva a los estudiantes a **Tomar al Azar** un objeto para luego **Forzarlo** a tener otra **Propiedad**? ¿Por qué ellos no consideran que esta estrategia sea "machetear" pero sí consideran que es "machetear" la asignación de propiedades más determinantes? Quizá la dificultad que encaran los estudiantes tiene que ver con el dilema cognitivo respecto a cuáles propiedades asignar y cuáles tratar de demostrar.

Otra causa para el dilema de los estudiantes puede residir en la lógica que hay detrás de una conjunción. Siendo conmutativa la conjunción, ¿por qué esa propiedad no parece ser útil cuando se quiere demostrar un enunciado cuyo consecuente involucra una conjunción? Además, ¿cómo entender que, contrario a lo que sucede en la mayoría de las demostraciones, donde la tesis del teorema es el último paso de la demostración, en el caso de una demostración de existencia algunas de las propiedades incluidas en la tesis se le asignan desde un principio a un objeto? Es indispensable entender que no se atribuyen libremente las propiedades sino que se determinan uno o más objetos específicos con esas propiedades bajo la condición de que sea posible validar teóricamente tal asignación.

La complejidad que encierran las consideraciones hechas nos permite ver claramente la necesidad de la mediación semiótica del profesor en el aula. Difícilmente hubieran podido los estudiantes descubrir por sí solos la estrategia para demostrar teoremas de existencia, como lo ilustra lo anteriormente expuesto, pues la estrategia está basada en cuestiones matemáticas que requieren mayor conocimiento de la lógica, de lo que es un sistema axiomático y de cómo se trabaja ceñido a este, conocimiento con el que no contaban en ese momento. Además, ¿cuánto tardó la comunidad matemática en configurar la estrategia que en la actualidad acepta como apropiada para demostrar existencia de objetos geométricos? y ¿qué nos hizo pensar que los estudiantes podían recorrer por sí solos de manera exitosa ese camino en unas pocas sesiones de clase? Cuando el curso se realiza bajo el supuesto de que aprender significa adoptar comprensivamente formas de actuar históricamente establecidas para modificar y extender el discurso sobre objetos y procedimientos matemáticos (Ben-Zvi y Sfard, 2007), entonces aprender cómo proceder para demostrar la existencia de un objeto matemático definido a través de más de una propiedad debe hacerse con la orientación explícita del profesor. Debe haber conversaciones sobre la diferencia entre tratar una conjunción en cuanto operación entre proposiciones, en la cual el orden es irrelevante, y usar la conjunción para expresar fenómenos y acciones en los que la temporalidad, la causalidad y la dependencia están presentes. Los estudiantes deben poder ver que la conjunción tiene una dimensión lógica y otra semántica. En el caso que nos ocupa, para demostrar una conjunción que garantice existencia, no se puede partir indistintamente de una u otra propiedad. La razón es que una propiedad tiene que ser inferida de la otra para que sea una demostración válida. No hay forma de saber todo esto sin la interacción explícita con un experto (Ben-Zvi y Sfard, 2007).

En cuanto a la mediación del profesor, privilegió la participación de los estudiantes para que fueran ellos quienes aportaran las ideas, muchas veces a través de preguntas relacionadas con lo que decían los estudiantes. No proporcionó información para impulsar a los estudiantes a modificar sus propuestas, ni indicó cómo debían proceder sino que guió el flujo del intercambio. Dejó que se expresaran ideas, a sabiendas de que no eran las adecuadas, solicitó la exposición clara de las ideas, y, por medio de preguntas, sembró duda e hizo evidente la necesidad de ser críticos ante lo que se propone. Esperó hasta que algún estudiante descubriera la inconsistencia de la propuesta. Sin embargo, esas acciones no parecen haber tenido un efecto notorio y en la dirección deseable con respecto a la construcción de significado de la estrategia apropiada para demostrar existencia. Dos semanas después de ocurrido el primer episodio, algunos estudiantes volvieron a proponer pasos, en otras demostraciones, que llevan a TAFP, y finalizando el semestre todavía ese era un asunto problemático. El hecho de que Ángela haya propuesto la estrategia TAFP en las dos ocasiones nos indica que ella requería más mediación y quizá una mediación de índole más decididamente semiótica. Probablemente, se habría beneficiado de acciones del profesor como la exigencia de expresar sus ideas completas, y de continuar con la producción de la demostración hasta que ella misma se diera cuenta de que se estanca el desarrollo de esta pues no hay forma, matemáticamente válida, de demostrar la segunda propiedad del objeto, en cada caso. Además, en ese momento habría sido oportuna una intervención del profesor en la que expusiera explícitamente dos asuntos: la invalidez matemática de TAFP y la explicación tanto de la estrategia adecuada como de su validez.

Ahora bien, la situación habría podido ser muy distinta. Podría ser que la interpretación que el profesor hiciera de los signos de Ángela en los dos episodios no se correspondiera con lo que ella hubiera querido comunicar. Podría ser que ella hubiera querido resaltar que el dominio de los posibles candidatos a punto medio y a bisectriz están restringidos respectivamente al segmento y a los rayos con puntos en el interior del ángulo. Pero esto es apenas una especulación que para tratar de dilucidarla requeriría que se le hubiera dado la oportunidad a la estudiante de desarrollar su idea sobre el procedimiento completo para demostrar la existencia de los objetos en cuestión.

Es posible que el profesor haya experimentado un dilema en torno a cuánto decir y en qué momento intervenir, ante la presunta ocurrencia de TAFP, dada la metodología participativa que quiere implementar. Consideramos que el manejo de este dilema implica diversos factores, entre los cuales podemos citar: la asignación de más tiempo para los aportes de los estudiantes; la atención del profesor para escuchar todo lo que el estudiante tiene que decir en un momento determinado; la reflexión y habilidad del profesor para distinguir sus interpretaciones de las de los estudiantes; y la previsión que le permita planear, de manera informada, acciones y momentos de intervención en el aula.

Referencias

Ben-Zvi, D. y Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Education & Didactique*, *1*(3), 117-134.

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en: http://www.jstor.org/stable /1968336

de Guzmán, M., Hodgson, B., Robert, A. y Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica* (*extra volume*): *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (vol. III, pp. 747-762). Berlin.

Dreyfus, T., Nardi, E. y Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 191-214). Dordrecht, Holanda: Springer.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Euclid, Densmore, D. (Ed.) y Heath T. L. (Tr.) (2003). *Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume*). Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press.

Harari, O. (2004). *Knowledge and demonstration. Aristotle´s Posterior Analysis*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2014). Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. IV, pp. 409-416). Vancouver, Canada: PME.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2007). Playfulness and proof, sense perception and inference. En C. E. Vasco y A. L. Gómez (Eds.), *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje* (pp. 137-168). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital.

Selden, A. y Selden, J. (2011). Mathematical and non-mathematical university students' proving difficulties. En L. R. Wiest y T. D. Lamburg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 675-683). Reno, EUA: University of Nevada, Reno.